

$$\begin{aligned} \bullet \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2} &= \left(x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right)^{x^2} = \left(1 - \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1. \text{ (C'est conf. I!)} \\ &= e^{x^2 \ln\left(1 - \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)} \quad \left(\text{Ici, on ne peut pas utiliser le DL de } (1+x)^\alpha \text{ car la puissance } \alpha \text{ varie}\right) \\ &= e^{x^2 \left[-\frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]} = e^{-\frac{1}{6} + o(1)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

$$\bullet y^2 - \cos \alpha y + 1 = 0 \quad \Delta = 4\cos^2 \alpha - 4 = 4(\cos^2 \alpha - 1) = -4\sin^2 \alpha = -(2\sin \alpha)^2$$

Etudions le cas où $\Delta \neq 0$, c'ad $\alpha \neq k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

$$y = \frac{\cos \alpha \pm i \sin \alpha}{2} = e^{\pm i \alpha}$$

$$P(x) = X^{2n} - \cos \alpha X^n + 1 \quad \text{On pose } y = X^n \quad P(x) = y^2 - \cos \alpha y + 1$$

Donc $X^n = e^{\pm i \alpha}$

1^{er} cas $X^n = e^{i \alpha} \quad x = e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad \text{ou } k=0, 1, \dots, n-1$

2^{es} cas $X^n = e^{-i \alpha} \quad x = e^{-i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad \text{ou } k=0, 1, \dots, n-1$

La décomposition dans \mathbb{C} est donc :

$$P(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \right) \left(X - e^{-i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \right)$$

Pour avoir la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les complexes conjugués :

$$\left(X - e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \right) \left(X - e^{-i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \right) = X^2 - \left[e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} + e^{-i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \right] X + e^{i0}$$

$$= X^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) X + 1$$

Donc, dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) X + 1 \right)$$