

$$\textcircled{1} \chi_a(x) = \begin{vmatrix} a-x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} \stackrel{\text{dapat}}{=} (a-x) \begin{vmatrix} -x & 0 & 1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = X(X-a) \cancel{-X}^2$$

Si  $a \neq 0$  et  $1$ ,  $a$  est racine double. Pour que  $A_a$  soit diagonalisable, et les autres sont simples, il faut que l'espace propre pour la valeur propre  $1$  soit de dimension  $2$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow A_a \vec{u} = 1 \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} ax = x \\ x+t = y \\ z = z \\ t = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=t \end{cases} \quad (\text{car } a \neq 1)$$

dim  $E_1 = 2$ , donc  $A_a$  est diagonalisable

$$\textcircled{2} \ln(1+2x) = \frac{2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} + \mathcal{O}(x^3)}{1+2x} = \frac{2x - 2x^2 + \frac{8x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3)}{1+2x}$$

$$\begin{array}{r} 2x - 2x^2 + \frac{8x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3) \\ -(2x + 2x^2) \\ \hline -4x^2 + \dots \\ -(-4x^2 - 4x^3) \\ \hline +20\frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3) \end{array} \Bigg| \frac{1+2x}{2x - 4x^2 + \frac{20}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^3)}$$

$$g(x) = \exp\left(\frac{\ln(1+2x)}{1+2x}\right) = e^{\frac{2x - 4x^2 + \frac{20}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^3)}{1+2x}} = 1 + [ ] + \frac{1}{2} [ ]^2 + \frac{1}{6} [ ]^3 + \mathcal{O}(x^3)$$

$$= 1 + 2x - 4x^2 + \frac{20}{3}x^3 + \frac{1}{2}(4x^2 - 16x^3) + \frac{1}{6} 8x^3 + \mathcal{O}(x^3)$$

$$= 1 + 2x - 4x^2 + \frac{20}{3}x^3 + 2x^2 - 8x^3 + \frac{4}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^3)$$

$$g(x) = 1 + 2x - 2x^2 + 0x^3 + \mathcal{O}(x^3)$$