

ATS 2018 (SLAGTAN Anthonin)

$$(1) (x-2)y' + y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-2)y' + y = -1$$

Hom: $y_H = Ae^{-\int \frac{1}{x-2} dx} = Ae^{-\ln(x-2)} = Ae^{-\ln\left(\frac{1}{x-2}\right)} = \frac{A}{x-2}$ où $A \in \mathbb{R}$

Sol particulière: Si on voit que $y_E = -1$ convient, c'est fini.

Si non, il ne faut pas chercher une sol particulière de la même forme que le second membre (ici une constante) car les coefficients devant y' n'est pas constant. On doit faire une MNC

$$y_E = \frac{Ax}{x-2}, \quad y_E' = \frac{A(x)(x-2) - Ax}{(x-2)^2}$$

$$(x-2)y_E' + y_E = A(x) - \frac{Ax}{x-2} + \frac{Ax}{x-2} = -1 \Rightarrow A(x) = -x$$

$$\Rightarrow y_E = \frac{-x}{x-2}$$

Sols de l'eq complète: $y = \frac{A-x}{x-2}$ où $A \in \mathbb{R}$

$$(2) z^4 - 2z^2 + 5 = 0 \quad \text{On pose } z = z^2$$

$$z^2 - 2z + 5 = 0 \quad \Delta = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$$

$$z = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i = z^2 \quad z = a+ib$$

$$z = a+ib \quad 1+2i = a^2 - b^2 + i2ab$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab = 2 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\ b = \frac{1}{a} \end{cases}$$

$$|1+2i| \quad a^2 + b^2 = \sqrt{5}$$

$$z = \pm \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + i \frac{1}{\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} \right)$$

$$1-2i = a^2 - b^2 + i2ab$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab = -2 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\ b = -\frac{1}{a} \end{cases}$$

$$z = \pm \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - i \frac{1}{\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} \right)$$