

ATS 2018 (SAVE Bephiste)

①  $\square$  3 vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  sont nécessairement liés car  $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$

Donc  $(x, Ax, A^2x)$  sont liés. Il existe  $a, b, c$  tels  $aAx + bAx + cA^2x = 0$

$\square$  On multiplie par  $A^{p-1}$ :  $aA^{p-1}x + b\underbrace{A^p x}_0 + c\underbrace{A^{p+1}x}_0 = 0$ . Donc  $aA^p x = 0$

Comme  $A^{p-1}x \neq 0$ :  $\underline{a=0}$

$\square$   $bAx + cA^2x = 0$ . On multiplie par  $A^{p-2}$

$bA^{p-1}x + cA^p x = 0 \Rightarrow bA^{p-1}x = 0$ , donc  $\underline{b=0}$

$\square$  donc  $cA^2x = 0$ , mais  $c \neq 0$ , donc  $\underline{A^2x = 0}$ . Si  $p \geq 3$ :

$A^{p-1}x = (A \cdot A^{p-2}x) = A^{p-3}A^2x = 0$  Impossible. Donc  $p \leq 2$

Donc  $\boxed{A^2 = 0}$

Si  $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ , alors  $M^4 = M^2 \cdot M^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$M^4 = 0$ , donc  $M^2 = 0$  d'après les  $\square$  précédentes.

Or  $M^2 \neq 0$ ! On aboutit à une contradiction.

Donc, il n'existe pas de  $M$  telle que  $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$