

ATS ex 8 (MARCELLIN Gael)

① $u_n = \ln(1 - \frac{1}{n^2}) = -\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \sim -\frac{1}{n^2}$

$\sum \frac{1}{n^2} CV$ (Riemann) $\Rightarrow \sum (\frac{1}{n^2}) CV \Rightarrow \underline{\underline{\sum u_n CV}}$ (Tds \mathbb{R})

② 1^{er} cas : $a = b = 0$ $A = 0$ $rg(A) = 0$ ($rg(A) = \dim(\text{Im}(f))$)

2^{es} cas : $b = 0$ et $a \neq 0$ $A = aI$ $rg(A) = n$ ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

3^{es} cas : $b \neq 0$: $A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & a \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & \dots & a+(n-1)b \\ b & a & & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & b \\ b & & & b & a \end{pmatrix}$

(ici on a remplacé L_1 par $L_1 + L_2 + \dots + L_n$)

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} a+(n-1)b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & a-b & 0 & & \\ \vdots & 0 & a-b & & \\ b & 0 & 0 & \dots & a-b \end{pmatrix}$

Cas 31 : $a = b$

A devient $\begin{pmatrix} na & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a & 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

$rg(A) = 1$

Cas 32 : $a = -(n-1)b$

A devient $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & a-b & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & & & & a-b \end{pmatrix}$

$rg(A) = n-1$

(une ligne de 0)

Cas 33 : $a \neq -(n-1)b$ et $a \neq b$: Il n'y a pas de colonnes ou de lignes de 0,

donc $rg(A) = n$