

ATS 2018 (CUB Y Coréain)

① Discuter suivant les valeurs de m du nombre de pts d'intersection de " $y=mx$ " et " $y=e^x$ ".

$\begin{cases} y=mx \\ y=e^x \end{cases} \Rightarrow e^x=mx$ On étudie $f_m(x) = e^x - mx$

1^{er} cas : $m < 0$ $f'_m(x) = e^x - m > 0, \forall x$

x	$-\infty$	$+\infty$
f'_m		+
f_m	$-\infty$	$+\infty$

f_m s'annule une seule fois
(C'est le T de la bijection)

2^e cas : $m = 0$ $e^x = 0$ n'a pas de solutions

3^e cas : $m > 0$ f'_m s'annule en $x_m = \ln(m)$
 $f_m(x_m) = e^{\ln(m)} - m \ln(m) = m - m \ln(m) = m(1 - \ln(m))$

1^{er} cas $e < m < e$ $\ln(m) < 1$ $f_m(x_m) > 0$

x	$-\infty$	$\ln(m)$	$+\infty$
f'_m	-	0	+
f_m	$+\infty$	> 0	$+\infty$

comme $f_m(x_m) > 0$, avec le tableau de variation, on voit que f_m ne s'annule jamais.
pas de solutions

2^e cas $m = e$

$f_m(e) = 0$ f_m s'annule une seule fois, en $x=e$

3^e cas $m > e$

$f_m(x_m) < 0$

x	$-\infty$	$\ln(m)$	$+\infty$
f'_m	-	0	+
f_m	$+\infty$	< 0	$+\infty$

f_m s'annule deux fois
 Une fois entre $-\infty$ et $\ln(m)$,
 Une fois entre $\ln(m)$ et $+\infty$