

ATS 2018 (CORNOT Maxime)

$$\textcircled{1} \star A = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\arcsin x \right]_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \arcsin(0) = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$$

$\star B = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$. On peut faire un chgt de variable simple qui est sous nos yeux : $X = x^2$. Ça marche.

Ou bien, le chgt (préconisé par le cours) qui permet d'enlever la racine : $x = \sin t$ (ici $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t$ car $t \in (0, \frac{\pi}{6})$)

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin t \cos t dt}{\cos t} = \left[-\cos t \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

$\star C = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 1^{ère} méthode : celle des cours. Chgt $x = \sin t$
 $dx = \cos t dt$

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 t \cos t dt}{\cos t}$$

$$\cos^2 t = 1 - 2\sin^2 t \Rightarrow \sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$$

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2} \right) dt = \left[\frac{1}{2}t - \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}/2}{4} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{24}$$

2^{ème} méthode : celle préconisée par l'énoncé :

$$C = \int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{I.I.T} \begin{cases} u = x & u \in]0, 1[\\ u' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & u = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

$$C = \left[-x\sqrt{1-x^2} \right]_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx \quad \left(A - C = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx \right)$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}} + A - C$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} - C \Rightarrow 2C = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$C = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{24}$$