

ATS 2018 (ANDRIANO Gaetan)

$$\textcircled{1} \bullet \ln(\sin x) = \ln(x + \mathcal{O}(x^3)) = \ln(x(1 + \mathcal{O}(x^2))) = \ln x + \ln(1 + \mathcal{O}(x^2))$$

Donc $\ln(\sin x) \sim \ln x$ car $\frac{\ln(\sin x)}{\ln x} = 1 + \frac{\ln(1 + \mathcal{O}(x^2))}{\ln x} \rightarrow 1 + \frac{0}{\infty} = 1$

$\int_0^1 \ln x \, dx$ CV (cours, on peut aussi calculer $\int_a^1 \ln x \, dx$ avec une EPP et on fait tendre a vers 0)

donc $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) \, dx$ CV (T des équivalents)

• chgt $x = \frac{\pi}{2} - X$ ($\cos X = \sin(\frac{\pi}{2} - X) = \sin x$)
 $dx = -dX$

$$\left[I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) \, dx = \int_{\pi/2}^0 \ln(\cos X) (-dX) = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos X) \, dX = J \right]$$

• Ainsi, J converge !

• $I + J = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x \cdot \cos x) \, dx = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right) \, dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x)) \, dx - \int_0^{\pi/2} \ln 2 \, dx$

chgt $X = 2x$ $I + J = 2I = \int_0^{\pi} \ln(\sin X) \frac{dX}{2} - \frac{\pi}{2} \ln 2$

$$2I = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\pi/2} \ln(\sin X) \, dX + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin X) \, dX \right) - \frac{\pi}{2} \ln 2$$

$$= \frac{1}{2} \left(I + \text{chgt } t = X - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{\pi}{2} \ln 2$$

$$2I = \frac{1}{2} \left(I + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) \, dt \right) - \frac{\pi}{2} \ln 2$$

$$= \frac{1}{2} (I + I) - \frac{\pi}{2} \ln 2 \Rightarrow \boxed{I = -\frac{\pi}{2} \ln 2}$$