

2017 Romania Thibault

① $\cos(mx) = \operatorname{Re}(e^{imx})$ car $e^{imx} = \cos(mx) + i\sin(mx)$

Donc $S_n = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\cos(mx)}{2^m} = \operatorname{Re}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{e^{imx}}{2^m}\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{ix}}{2}\right)^m\right)$

(C'est une série géométrique. \square : $\sum_0^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$, $\forall r \in]-1; 1[$ (dans \mathbb{R})
 $\forall r \text{ tq } |r| < 1$ (dans \mathbb{C})

Ici, la raison vaut $r = \frac{e^{ix}}{2}$.

Donc $S = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1 - \frac{e^{ix}}{2}}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{2}{2 - \cos x + i\sin x}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{2(2 - \cos x - i\sin x)}{(2 - \cos x)^2 + (\sin x)^2}\right)$ (on a multiplié par le conjugué)

$$S = \frac{2(2 - \cos x)}{5 - 4\cos x}$$

② $\Sigma = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2x+3} dx$ $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie que $M^2 + 2M - 3I = 0$

$\frac{1}{3}(M^2 + 2M) = I \Rightarrow M \left[\frac{1}{3}(M + 2I) \right] = I$. $M \cdot B = I$ avec $B = \frac{1}{3}(M + 2I)$

Donc M est inversible et $M^{-1} = B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$X^m = Q(x)(x^2 - 2x - 3) + R(x)$

$x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$

$\deg R \leq 1 \Rightarrow R(x) = ax + b$

En 3: $3^m = 0 + 3a + b$

En -1: $(-1)^m = 0 + -a + b$

$\begin{cases} 3a + b = 3^m \\ -a + b = (-1)^m \end{cases}$

$\begin{cases} 4-1: a = \frac{3^m - (-1)^m}{4} \\ b = a + (-1)^m = \frac{3^m + 3(-1)^m}{4} \end{cases}$

$R(x) = \frac{3^m - (-1)^m}{4} x + \frac{3^m + 3(-1)^m}{4}$

$\rightarrow (M^m = Q(M) \underbrace{(M^2 - 3M - 3I)}_0 + R(M) = 3^m \frac{(-1)^m}{4} M + \frac{3^m + 3(-1)^m}{4} I)$ Hors degré

③ $xy' + 2y = x^2$

Hom: $y_h = A e^{-\int \frac{2}{x} dx} = A e^{-2 \ln x} = \frac{A}{x^2} = y_h$

Solution particulière: MVC

$y_p = A(x) x^{-2}$

$y_p' = A'(x) x^{-2} - 2A(x) x^{-3}$

$xy_p' + 2y_p = A'(x) x^{-1} - 2A(x) x^{-2} + 2A(x) x^{-2} = x^2 \Rightarrow A'(x) = x^3 \Rightarrow A(x) = \frac{x^4}{4}$

$\Rightarrow A'(x) = x^3 \Rightarrow A(x) = \frac{x^4}{4}$

$y_p = \frac{x^2}{4}$

Sols de l'éq complète: $y = A x^{-2} + \frac{x^2}{4}$