

LACOUR Coexertion

1. On trouve bien $A^2 = EI - A$

Donc $A^2 + A = EI$ $\frac{1}{2}(A^2 + A) = \frac{1}{2}EI$ $A[\frac{1}{2}(A+I)] = \frac{1}{2}EI$

A est inversible car il existe une matrice B telle que $AB = I$

ici $B = A^{-1} = \frac{1}{2}(A+I) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $P(X) = X^2 + 1$

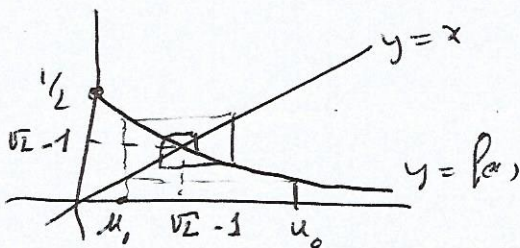
$X^2 + 1$ n'est pas scindé dans \mathbb{R} , donc A n'est pas diagonalisable dans \mathbb{R} .

$X^2 + 1 = (X-i)(X+i)$. $X^2 + 1$ est scindé à racines simples dans \mathbb{C} .

Donc A est diagonalisable dans \mathbb{C}

3. $u_0 > 0$ $u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}$ $f(x) = \frac{1}{2+x}$ sur \mathbb{R}^+ $f'(x) = -\frac{1}{(2+x)^2} < 0$

$f(x) = x \iff 2x+x^2=1 \iff x^2+2x-1=0$ $\Delta = 8 = (2\sqrt{2})^2$ $x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$



On dessine la suite.

Sur le dessin, on voit que elle CV vers $L = \sqrt{2} - 1$

On utilise l'I.A.F :

" Si f est de classe C^1 sur $[a, b]$, alors

$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$ où $M = \sup_{t \in [a, b]} |f'(t)|$, $\forall x, y \in [a, b]$

Ici, $M = \frac{1}{4}$ ($|f'(t)| = \frac{1}{(2+t)^2} \leq \frac{1}{4}$)

Avec $x = u_n$ et $y = L = \sqrt{2} - 1$, on obtient: $|f(u_n) - f(L)| \leq M|u_n - L|$

Comme $f(L) = L$ et $f(u_n) = u_{n+1}$, on obtient $|u_{n+1} - L| \leq M|u_n - L|$

On pose $v_n = |u_n - L|$ $v_{n+1} \leq M v_n$, donc $v_n \leq M^n v_0 = \frac{1}{4}^n v_0 \rightarrow 0$

$v_n \rightarrow 0$, donc $|u_n - L| \rightarrow 0$ $u_n \rightarrow L = \sqrt{2} - 1$

4. HM: $X^2 + 9$ a deux racines: $\pm 3i$ donc $y_H = A \cos(3x) + B \sin(3x)$

Sol particulière: $y_p = \frac{1}{3}$ convient

Sol de l'eq complète: $y = A \cos(3x) + B \sin(3x) + \frac{1}{3}$

La solution: $y(0) = A + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \implies A = \frac{1}{3}$ $y = \frac{2}{3} \cos(3x) + B \sin(3x) + \frac{1}{3}$

$y' = -2 \sin(3x) + 3B \cos(3x)$ $y'(0) = 3B = 0$ $B = 0$

$y(x) = \frac{2}{3} \cos(3x) + \frac{1}{3}$