

(1) $(x^2-1)y' + xy = -1$ et $x \in]-1; 1[$

Δ ici $|x^2-1| = -(x^2-1)$
 car $x \in]-1; 1[$

MOM: $y_H = Ae^{-\int \frac{x}{x^2-1} dx} = Ae^{-\frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2-1} dx} = Ae^{-\frac{1}{2} \ln|x^2-1|}$

$y_H = A e^{-\frac{1}{2} \ln(1-x^2)} = A(1-x^2)^{-1/2}$

$y_H = \frac{A}{\sqrt{1-x^2}}$

SP Recherche: MVC

$y_2 = A(x)(1-x^2)^{-1/2}$

$y_2' = A(x)(1-x^2)^{-3/2} + \frac{1}{2} (1-x^2)^{-5/2} 2x A(x)$

$(x^2-1)y_2' + xy_2 = -A'(x)(1-x^2)^{1/2} - x(1-x^2)^{-1/2} A(x) + xA(x)(1-x^2)^{-1/2} = -1$

$\Rightarrow A'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow A(x) = \arcsin x$

$y_2 = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

Sols de l'eq complete: $y = \frac{A + \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

(2) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3+x}{1+x^6} dx$ et $b \in \pm \infty$

en $+\infty$: $\frac{x^3+x}{1+x^6} \sim \frac{1}{x^3}$

$\int \frac{1}{x^3} dx$ CV (Riemann) $\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{x^3+x}{1+x^6} dx$ CV (Tds, N)

en $-\infty$: $\frac{x^3+x}{1+x^6} \sim \frac{1}{x^3}$

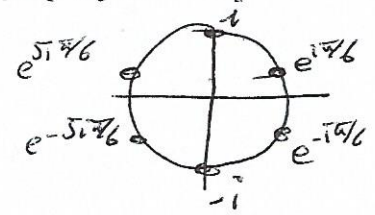
Idem.

$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^3+x}{1+x^6} dx + \int_{-\infty}^0 \frac{x^3+x}{1+x^6} dx = A + -A$ car $\frac{x^3+x}{1+x^6}$ est impaire
 $= 0$

On aurait pu demander de calculer $\int_0^{+\infty} \frac{x^3+x}{1+x^6} dx = I$

Voici le debut de ce calcul: On cherche tout d'abord les racines de $1+x^6$

$x^6+1=0 \Leftrightarrow x^6=-1 \Leftrightarrow x = e^{i\pi/6}, x_2 = e^{i5\pi/6}, x_3 = e^{i3\pi/2}$



Donc $x^6+1 = \left[(x - e^{i\pi/6}) / (x - e^{-i\pi/6}) \right] \left[(x - i) / (x + i) \right] \left[(x - e^{i5\pi/6}) / (x - e^{-i5\pi/6}) \right]$
 $= (x^2 - 2\cos(\pi/6)x + 1) (x^2 + 1) (x^2 - 2\cos(5\pi/6)x + 1)$
 $= (x^2 - \sqrt{3}x + 1) (x^2 + 1) (x^2 + \sqrt{3}x + 1)$

Donc $F(x) = \frac{x^3+x}{1+x^6} = \frac{x(x^2+1)}{(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2+1)} = \frac{ax+b}{x^2-\sqrt{3}x+1} + \frac{cx+d}{x^2+\sqrt{3}x+1}$

Comme F est impaire: $F(-x) = \frac{-ax+b}{x^2+\sqrt{3}x+1} + \frac{-cx+d}{x^2-\sqrt{3}x+1} = -F(x) = \frac{-ax-d}{x^2+\sqrt{3}x+1} + \frac{-cx+b}{x^2-\sqrt{3}x+1}$

Donc $a=c$ et $b=-d$

$F(x) = \frac{ax+b}{x^2-\sqrt{3}x+1} + \frac{ax-b}{x^2+\sqrt{3}x+1}$. On multiplie des par x,

puis on prend la valeur en $+\infty$. $\frac{x^4+x^2}{1+x^6} = \frac{ax^2+bx}{x^2-\sqrt{3}x+1} + \frac{ax^2-bx}{x^2+\sqrt{3}x+1}$. En $+\infty$: $0 = a+a = 2a \Rightarrow a=0$