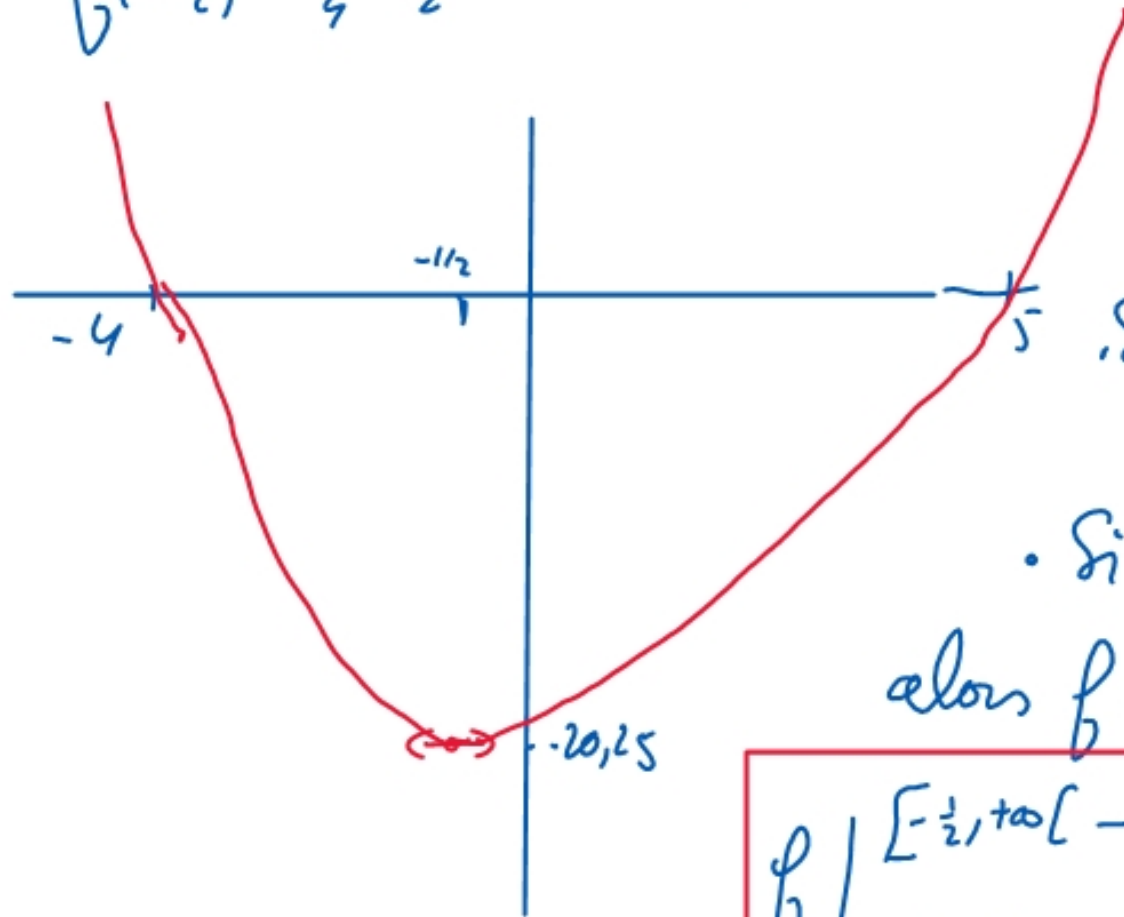


ex: $f(x) = x^2 + x - 20$ $f'(x) = 2x + 1$ f' s'annule en $x = -\frac{1}{2}$

$f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 20 = -20,25$



Si f va de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ,
 f est ni injective ni surjective

• Si f va de \mathbb{R} dans $[-20,25; +\infty[$
alors f est surjective

• Si f va de $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ dans \mathbb{R}
alors f est injective

$f \mid \begin{array}{l} [-\frac{1}{2}, +\infty[\longrightarrow [-20,25, +\infty[\\ x \longmapsto x^2 + x - 20 \end{array}$ est bijective

Quelle est la réciproque de f ? $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 + x - 20 = y$$

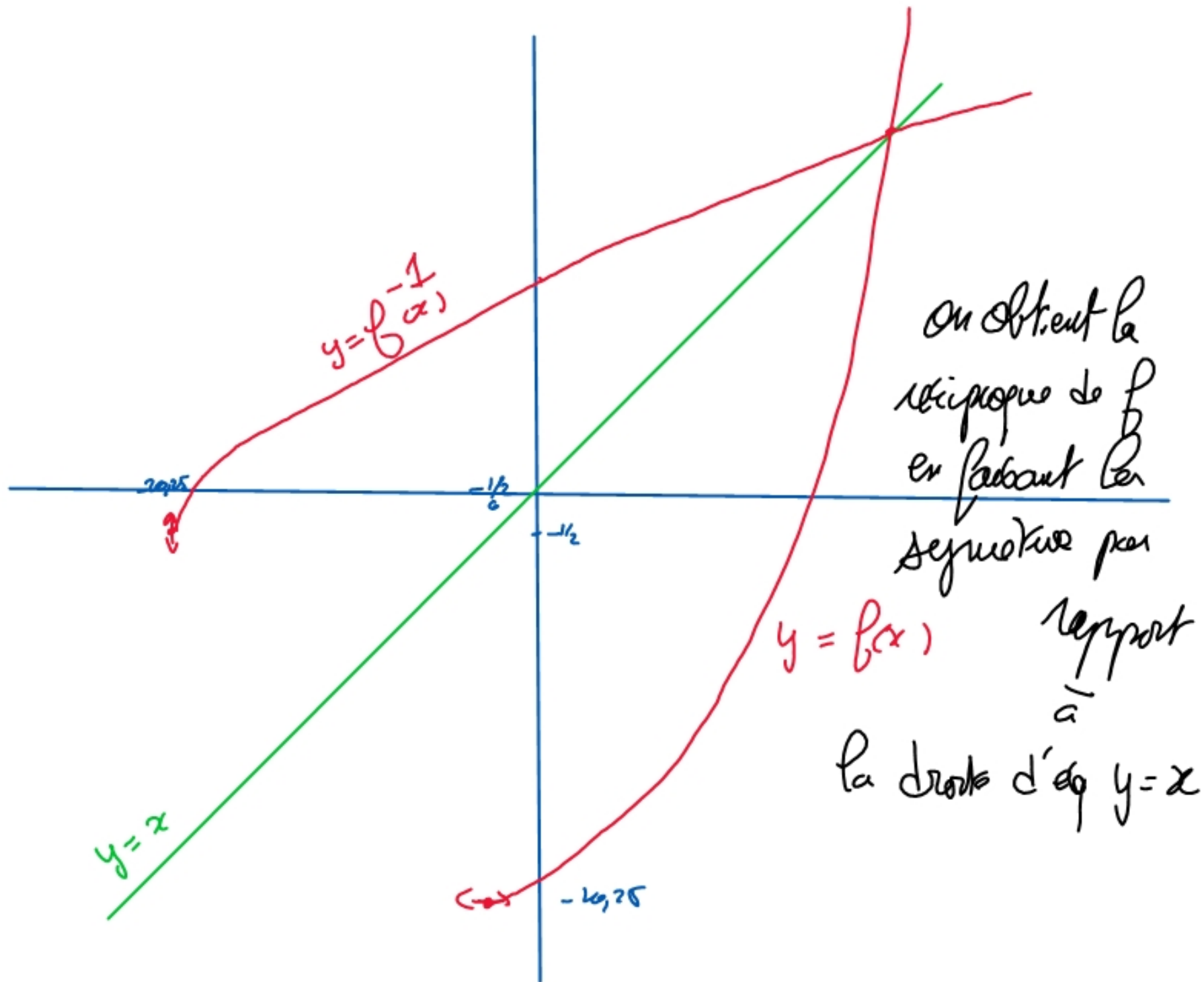
$f^{-1}(y) = x$? on cherche x en fonction de y .

$$x^2 + x - 20 - y = 0 \quad \Delta = 1 + 4 \cdot (20 + y) = 81 + 4y$$

$$2 \text{ racines } x = \frac{-1 \pm \sqrt{81 + 4y}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{81 + 4y}}{2}$$

On veut un $x \geq -\frac{1}{2}$, donc $x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{81 + 4y}}{2}$

Ainsi $f^{-1} : [-20, +\infty[\longrightarrow [-\frac{1}{2}, +\infty[$
 $y \longmapsto -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{81 + 4y}}{2}$

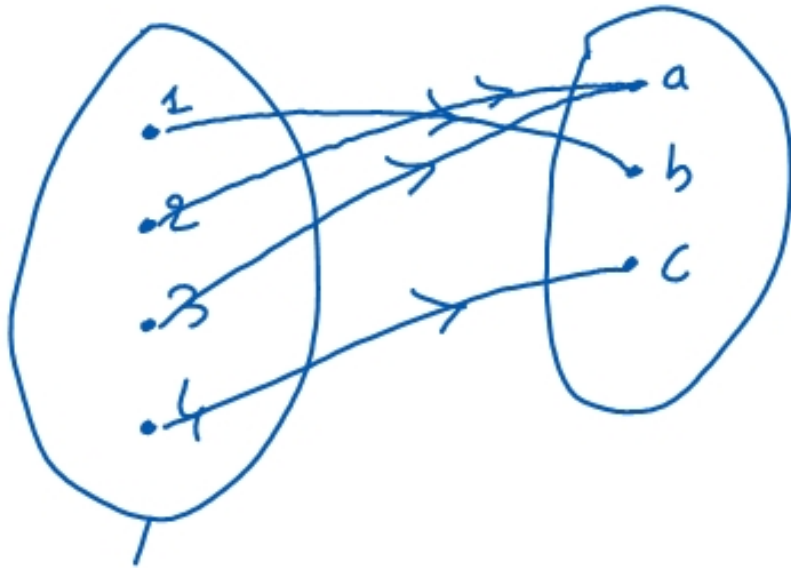


ex: $h \mid \{1,2,3,4\} \longrightarrow \{a,b,c\}$

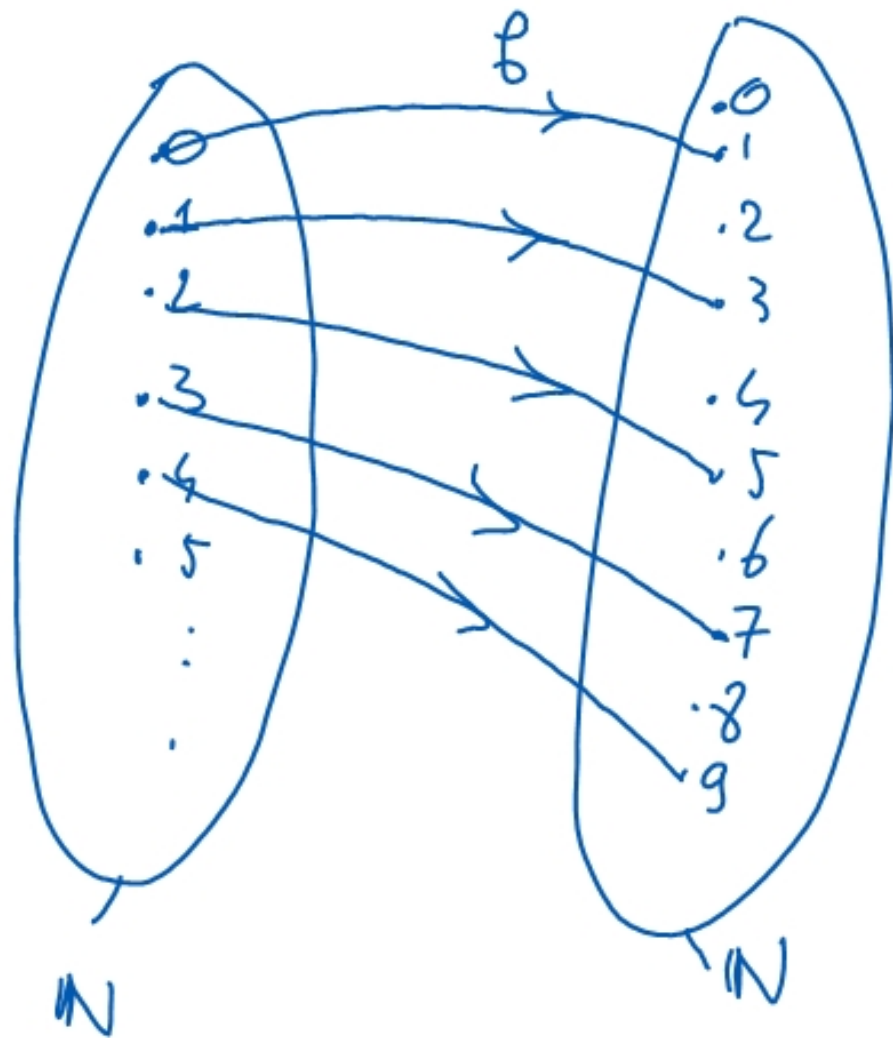
1	\longmapsto	b
2	\longmapsto	a
3	\longmapsto	a
4	\longmapsto	c

tous les els de l'ens
d'arrivée $\{a,b,c\}$ ont 1 ou 2
antécédents. Donc f est surjective

Comme a a 2 antécédents, h n'est pas
injective



ex: $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $n \mapsto 2n+1$



tous les elts de l'ensemble
d'arrivée \mathbb{N} ont 0 ou 1
antécédents, donc f est injective

\exists n a pas d'antécédents, donc
 f n'est pas surjective

ex: $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$
 $(x, y) \mapsto \left(-\frac{x}{y}; -\frac{1}{y}\right)$

où \mathbb{R}^* est le plan xoy , privé de
 la droite d'éq $y = 0$

On prend un (X, Y) dans l'ensemble d'arrivée \mathbb{R}^* (càd $Y \neq 0$)
 On cherche ses antécédents c'ad les (x, y) tels que $f(x, y) = (X, Y)$

$$f(x, y) = (X, Y) \Leftrightarrow \begin{cases} (1) & -\frac{x}{y} = X \\ (2) & -\frac{1}{y} = Y \end{cases}$$

On cherche x et y

$$(2) \Rightarrow -1 = Y \cdot y \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{Y}}$$

$$(1) \Rightarrow x = -Xy = -X \cdot \left(-\frac{1}{Y}\right) = \frac{X}{Y} \quad \boxed{x = \frac{X}{Y}}$$

tous les (X, Y)
 ont 1 seul antécédent

$$(x, y) = \left(\frac{X}{Y}, -\frac{1}{Y}\right)$$

donc f est bijective

et $f^{-1}: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$
 $(X, Y) \mapsto \left(\frac{X}{Y}, -\frac{1}{Y}\right)$

Equations Différentielles d'ordre 1

I Rappel sur les dérivées et primitives des fonctions classiques.

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{cste}$$

$$(x^3)' = 3x^2 \quad (x^{n+1})' = (n+1)x^n$$

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n$$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$\int \cos x dx = \sin x + \text{cste}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + \text{cste}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$\int e^x dx = e^x + c + k_e$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c + k_e$$

$$\left(\int \ln x dx = x \ln x - x + c + k_e \right)$$

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$f \circ g = f[g] = f'[g] \cdot g'$$

$$\text{ex } \begin{array}{c} \sin(2x) \\ \uparrow \quad \uparrow \\ f \quad g \end{array} ' = \begin{array}{c} \cos(2x) \cdot 2 \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ f' \quad (g) \quad \cdot \quad g' \end{array}$$

$$(e^{2x})' = e^{2x} \cdot 2$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f[g]' = f'[g] \cdot g'$$

$$(\sin(x^8))' = \cos(x^8) \cdot 8x^7 \rightarrow \text{ici } f = \sin x \text{ et } g(x) = x^8$$

$$\sin^8(x) = 8 \sin^7(x) \cdot \cos(x) \rightarrow \text{ici } f(x) = x^8 \text{ et } g(x) = \sin x$$

$$\int \cos(3x) dx = ?$$

$$\text{j'essaie } \sin(3x) \cdot \sin(3x)' = \cos(3x) \cdot 3$$

$$= \frac{\sin(3x)}{3}$$

$$\int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3}$$

II Changement de variable

exemple: On veut calculer $I = \int_{t=2}^{t=3} \frac{1}{t \ln(t)} dt$

On fait le changt de variable $x = \ln(t)$

les bornes: si $t=2$, alors $x = \ln(2)$. si $t=3$ $x = \ln(3)$

$$x = \ln(t) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = \frac{1}{t} dt \Rightarrow \boxed{t dx = dt}$$

$$I = \int_{x=\ln(2)}^{x=\ln(3)} \frac{1}{\cancel{t} \cdot x} \cancel{t} dx = \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{1}{x} dx = \left[\ln x \right]_{\ln(2)}^{\ln(3)}$$

$$\underline{I = \ln(\ln(3)) - \ln(\ln(2))}$$

$$\text{ex 2: } J = \int \sin^4 x \cos x \, dx$$

$$\text{chgt: } t = \sin x \quad (\text{ou } t = \cos x)$$

$$\frac{dt}{dx} = \cos x \Rightarrow dt = \cos x \, dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos x}$$

$$J = \int t^4 \cdot \cancel{\cos x} \frac{dt}{\cancel{\cos x}} = \frac{t^5}{5} + cte = \frac{\sin^5 x}{5} + cte$$

$$\text{ex 3: } k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x \, dx \quad \text{chgt } t = \sin x \quad dx = \frac{dt}{\cos x}$$

Si $x=0$, alors $t=0$. Si $x=\frac{\pi}{2}$, alors $t=1$

$$\Rightarrow k = \int_0^1 t^4 \cancel{\cos x} \frac{dt}{\cancel{\cos x}} = \left[\frac{t^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{5}$$

$$\text{ex 4: } I = \int e^{\cos x} \cdot \sin x \, dx \quad \text{dét } t = \cos x$$

$$\frac{dt}{dx} = -\sin x \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{-dt}{\sin x}$$

$$I = \int e^t \cancel{\sin x} \frac{-dt}{\cancel{\sin x}} = - \int e^t dt = -e^t + C$$

ou essaye avec $t = \sin x$ $\frac{dt}{dx} = \cos x$ $dx = \frac{dt}{\cos x}$

$$I = \int e^{\cos x} t \frac{dt}{\cos x} \quad \text{sans simplification possible}$$

ex 5: $x > 0$ $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$

A l'aide du chgt $u = \frac{1}{t}$, montrer que $F(x) = F(\frac{1}{x})$

$\Rightarrow t = \frac{1}{u}$ $\frac{du}{dt} = -\frac{1}{t^2} \Rightarrow dt = -t^2 du$

$dt = -\frac{du}{u^2}$

Si $t=1$, alors $u=1$

Si $t=x$, alors $u = \frac{1}{x}$

$F(x) = \int_{u=1}^{u=\frac{1}{x}} \frac{\ln(\frac{1}{u})}{1+(\frac{1}{u})^2} \left(-\frac{du}{u^2}\right)$

Rappel: $\ln(\frac{1}{u}) = -\ln(u)$

$F(x) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{-\ln(u)}{(1+\frac{1}{u^2}) \cdot u^2} (-du) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln u}{u^2+1} du = F(\frac{1}{x})$

