



$$\textcircled{1} \quad \cos(2x) = \sin x \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow 2x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi$$

$$1^{\text{er}} \text{ cas: } 2x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$\dots -\frac{3\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}; \dots$$

$$2^{\text{e}} \text{ cas: } 2x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \dots; -\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \dots$$

entre 0 et 2π : $\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos(2x) - \sin x$	+	0	-	0	+	0

L'ensemble des sol. de $\cos(2x) = \sin x$ est

$$\left[0, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left] \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left] \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad & \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x+1)^2 + y^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 1 - x^2 & x = ? \\ x^2 + 2x + 1 + (1 - x^2) = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$2x + 2 = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow 2x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} - 2 = \frac{3 + \sqrt{5} - 4}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

$$\begin{array}{r|l}
 \textcircled{3} & 2160 & 2 \\
 & 1080 & 2 \\
 & 540 & 2 \\
 & 270 & 2 \\
 & 135 & 3 \\
 & 45 & 3 \\
 & 15 & 3 \\
 & 5 & 5
 \end{array}$$

$$2160 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$$

$$(5) F = \frac{5+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(5+2\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$
$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 3 - 2 = 1$$

$$= \frac{5\sqrt{3} + 5\sqrt{2} + 2\sqrt{6} + 4}{1} = 5\sqrt{3} + 5\sqrt{2} + 2\sqrt{6} + 4$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

$$a^{1/2} \cdot b^{1/2} = (ab)^{1/2}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$a^n \cdot a^p = a^{n+p}$$

(7) f est paire $\Leftrightarrow f(-x) = f(x), \forall x$
 f est impair $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x), \forall x$

On calcule $f(-x)$

ex : avec $f(x) = \sin(x^2)$: $f(-x) = \sin((-x)^2) = \sin(x^2) = f(x)$

avec $f(x) = \sin(3x)$: $f(-x) = \sin(3(-x)) = \sin(-3x) = -\sin(3x)$
 car \sin est impair
 $= -f(x)$ donc f est impair

avec $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$: $f(-x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$
 $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$: $f(-x) = \ln(1-x) - \ln(1+x)$
 $= -(\ln(1+x) - \ln(1-x)) = -f(x)$
 donc f est impair

avec $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$ $f(2) = \frac{5}{3}$ et $f(-2) = \frac{5}{-1} = -5$

$f(-2) \neq f(2)$, donc f n'est pas paire
 $f(-2) \neq -f(2)$, ————— impaire

$\sqrt{x+20} > x$. On trouve : $\sqrt{x+20} = x \Rightarrow x+20 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 20$

$x > -20$ $\Delta = 1+80 = 81$ 2 racines $x = \frac{1 \pm 9}{2} = \begin{cases} 5 \\ -4 \end{cases}$

On vérifie: avec $x = -4$: $\sqrt{16} = 4 = -4$ NON

avec $x = 5$: $\sqrt{25} = 5 = 5$ OUI

On fait un tableau de signe pour $f(x) = \sqrt{x+20} - x$

x	-20	0	5	29	+∞
$\sqrt{x+20} - x$		$\sqrt{20}$ +	0	$7-29 < 0$ -	

$S = [-20, 5[$

$$f(xy) = f(x+y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{Avec } y=0$$

$$f(0) = f(x+0) \quad \forall x$$

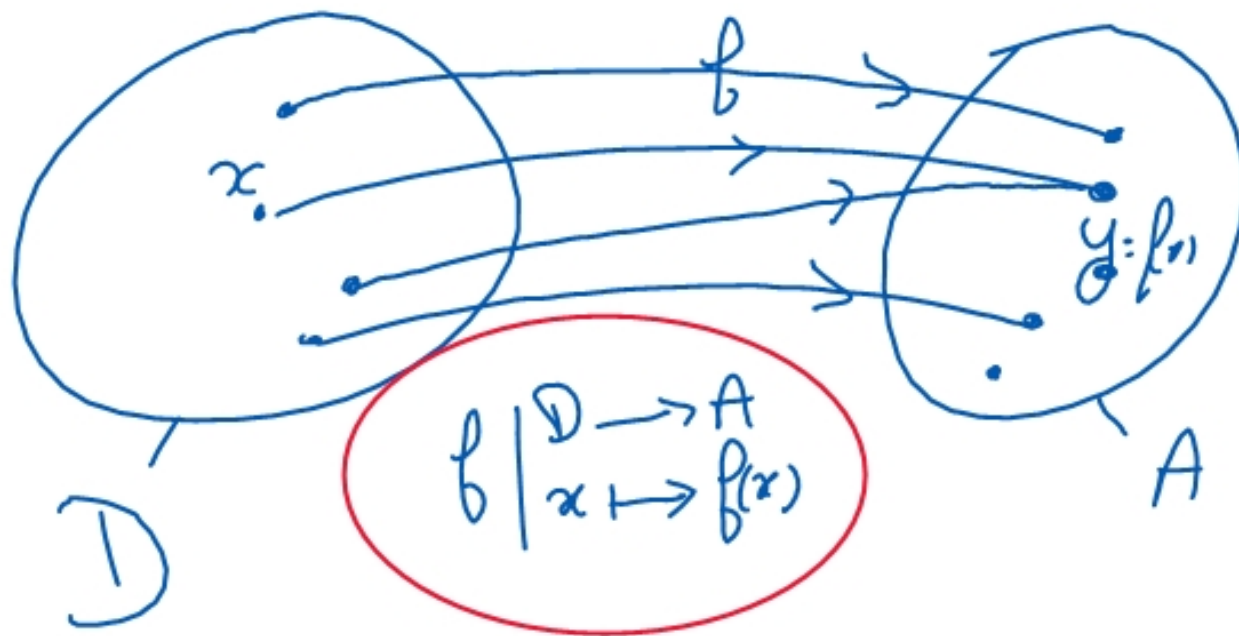
$$\boxed{f(x) = f(0), \forall x}$$

$$\text{avec } y=1 \quad \cdot \quad f(x) = f(x+1) \quad \forall x$$

Applications

I Généralités

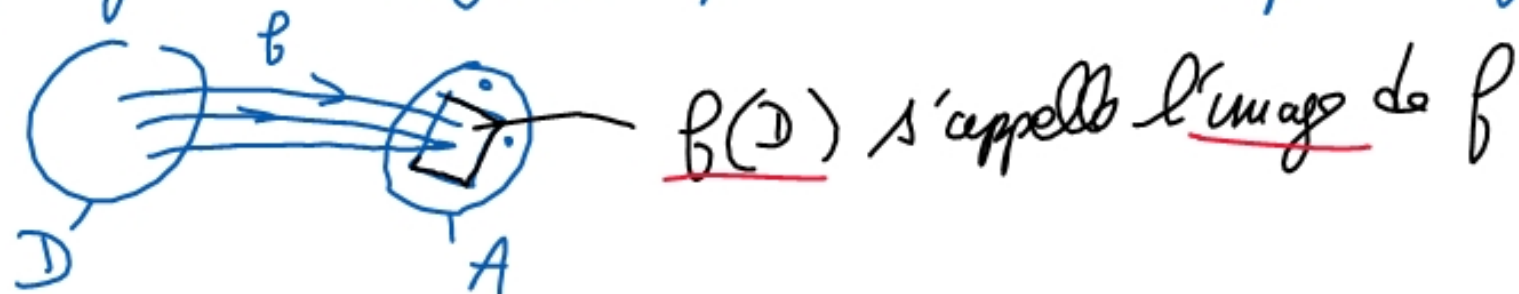
Une application f est donnée par son ensemble de départ (D), son ensemble d'arrivée (A), et par une valeur dans A pour chaque x de D (on dit $f(x) = y$)



Lorsque $f(x) = y$, on dit que y est l'image de x
 et que x est un antécédent de y

Il y a toujours une seule image pour un $x \in D$

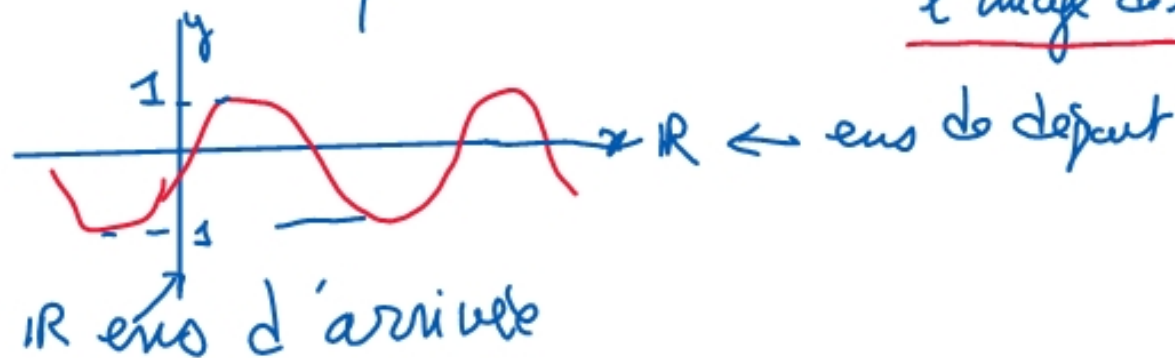
Il peut y avoir un, zéro ou plusieurs antécédents pour un $y \in A$.



ex: $\sin \mid \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sin x$

l'image de π est $\sin(\pi) = 0$

l'image de \sin est $[-1, 1]$



II Applications injectives et surjectives.

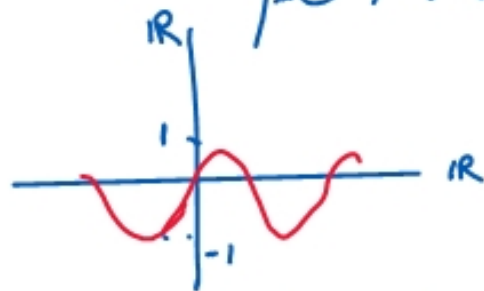
def: $f: D \rightarrow A$ est injective lorsque tous les élt de l'ensemble d'arrivée ont au plus 1 antécédent
(donc 0 ou 1 antécédent)

def: $f: D \rightarrow A$ est surjective lorsque tous les élt de l'ens d'arrivée ont au moins 1 antécédent

def: $f: D \rightarrow A$ est bijective lorsque tous les élt de l'ens d'arrivée ont exactement 1 antécédent

$$\boxed{\text{bijectif} = \text{injectif} + \text{surjectif}}$$

ex 1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sin(x)$

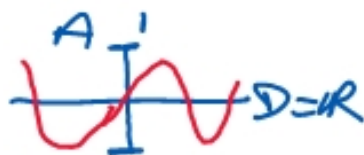


2 n'a pas d'antécédent
 donc
 f n'est pas surjective

O a une infinité d'antécédent
 (pour les $k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$)

donc
 f n'est pas injective

$g: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$
 $x \mapsto \sin(x)$

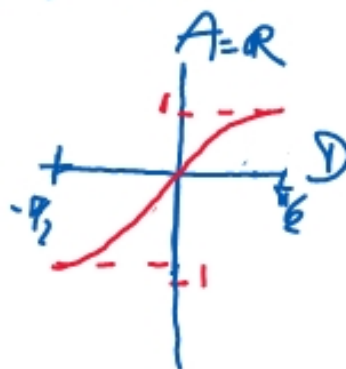


tous les élt de $A = [-1, 1]$
 ont une infinité d'antécédent

g est surjective
 et

g n'est pas injective

$h: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sin(x)$



les $y > 1$ et < -1 n'ont pas
 d'antécédent

les $y \in [-1, 1]$ ont 1 antécédent

h est injective

et

n'est pas surjective

$k: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$
 $x \mapsto \sin(x)$

k est bijective car tous les élt de $[-1, 1]$ ont exact^t 1 antécédent dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$