

exercice

7.2 Parités

Def: La fonction f qui va de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est paire lorsque

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = f(x)$$

Il y a une symétrie / axe des y

Def: La fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est impaire lorsque

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = -f(x)$$

Il y a une symétrie par rapport à 0

ex: \sin est impaire: $\sin(-x) = -\sin x$

\cos est paire: $\cos(-x) = \cos x$

Pour voir si une fonction est paire ou impaire, on calcule $f(-x)$

ex 1: $f(x) = \sin(3x)$

$$f(-x) = \sin(3(-x)) = \sin(-3x) = -\sin(3x) \text{ car } \sin \text{ est impaire}$$
$$= -f(x). \quad \text{Donc } f \text{ est } \underline{\text{impaire}}$$

ex 2: $f(x) = \sin(x^2)$

$$f(-x) = \sin((-x)^2) = \sin(x^2) = f(x). \quad \text{Donc } f \text{ est } \underline{\text{paire}}$$

ex 3: $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1}$

$$f(2) = \frac{9}{3} = 3 \quad \text{et} \quad f(-2) = \frac{-8 + 1}{-2 + 1} = \frac{-7}{-1} = 7$$

$$f(-2) \neq \begin{cases} f(2) \\ -f(2) \end{cases}$$

f est ni paire, ni impaire

ex 4

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

Rappel: $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

$$f(-x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

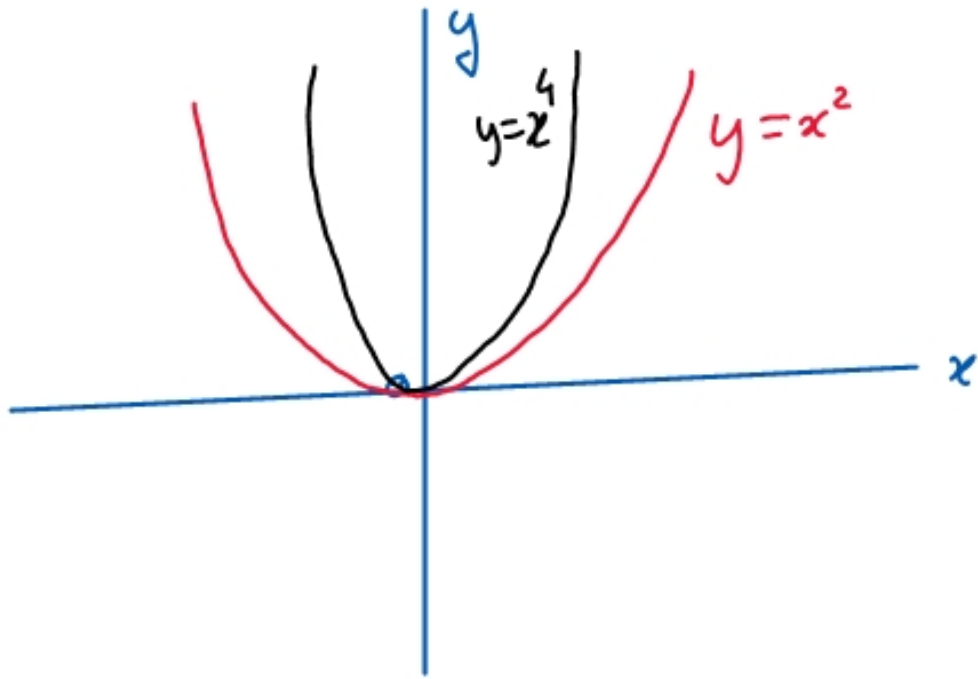
$$= \ln(1-x) - \ln(1+x)$$

$$= -(\ln(1+x) - \ln(1-x)) = -f(x)$$

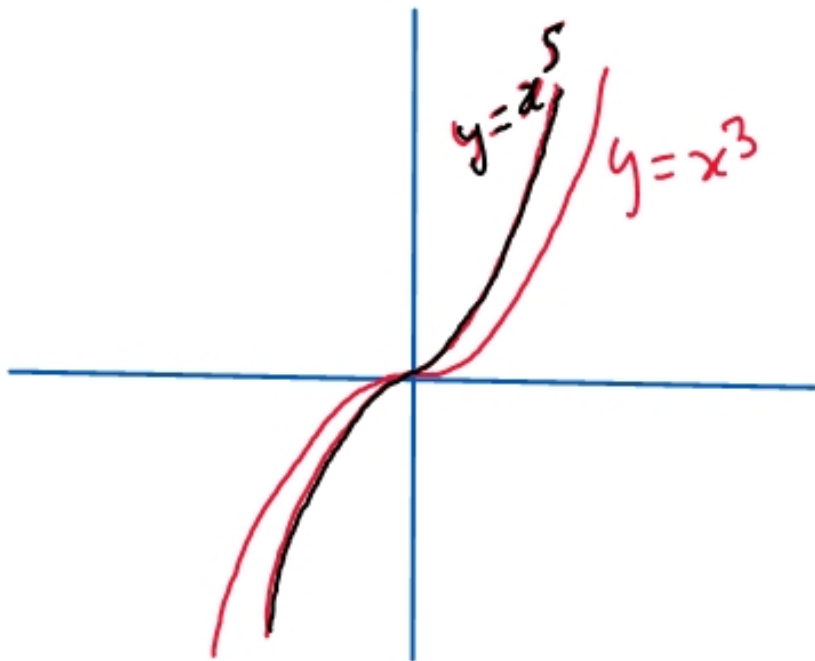
donc f est impaire

7.3 les fonctions puissances

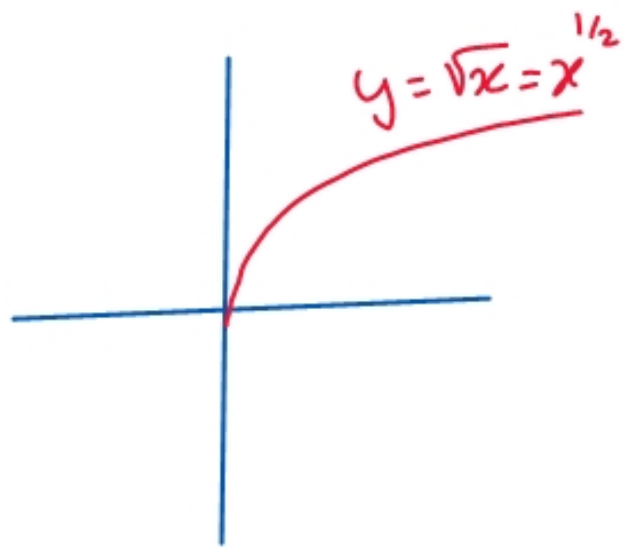
$$f(x) = x^a \quad \text{avec } a \in \mathbb{N}$$



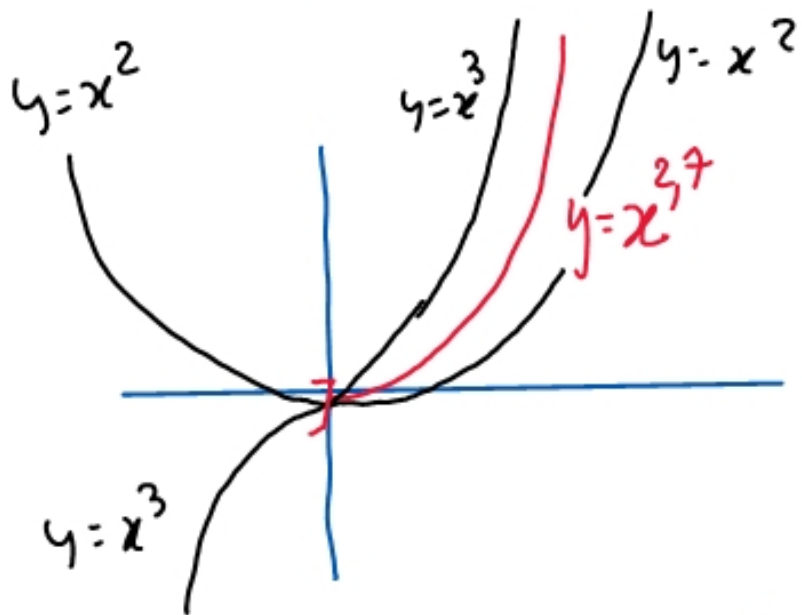
ces fonctions sont
paires



impaires



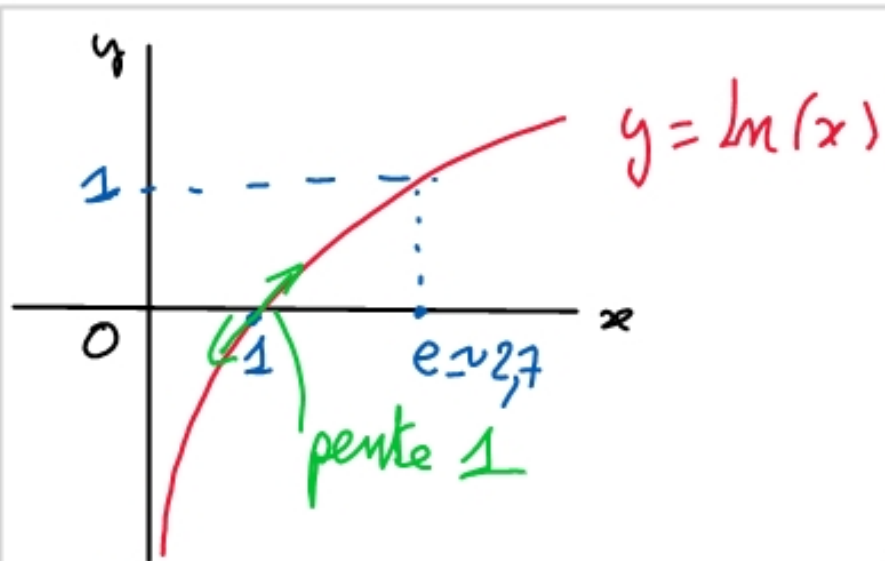
L'ensemble de def est \mathbb{R}^+



$$y = x^{2.7} = e^{2.7 \ln x}$$

Elle est définie sur \mathbb{R}^{+*}

7.4 Exponentielle et Logarithme Népérien



$$\left(\int \ln x \, dx = x \ln x - x \right)$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

Ensemble de def: $\mathbb{R}^{+*} =]0, +\infty[$

$$\ln(x) = \int \frac{1}{x} dx$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\ln(a^b) = b \ln(a)$$

ex: $\ln(\sqrt{x}) = \ln(x^{1/2}) = \frac{1}{2} \ln(x)$



ensemble de def: \mathbb{R}

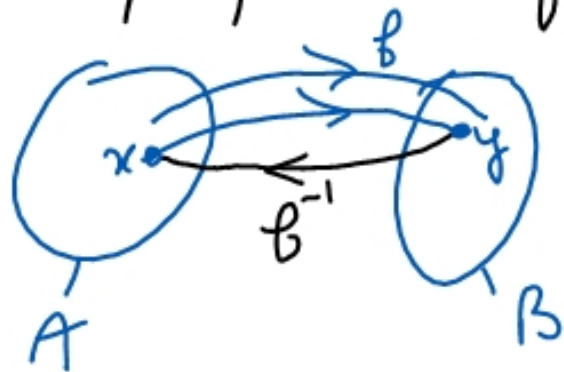
ensemble d'arrives: \mathbb{R}^{++} $e^x > 0, \forall x$

$$e^{\ln x} = x, \forall x > 0 \quad \text{et} \quad \ln(e^x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

On dit que f et g sont réciques lorsque

$$\forall x \ f[g(x)] = x \quad \text{et} \quad \forall x \ g[f(x)] = x$$

La réciproque d'une fonction f est notée f^{-1} en général



à ne pas confondre avec $\frac{1}{f}$

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

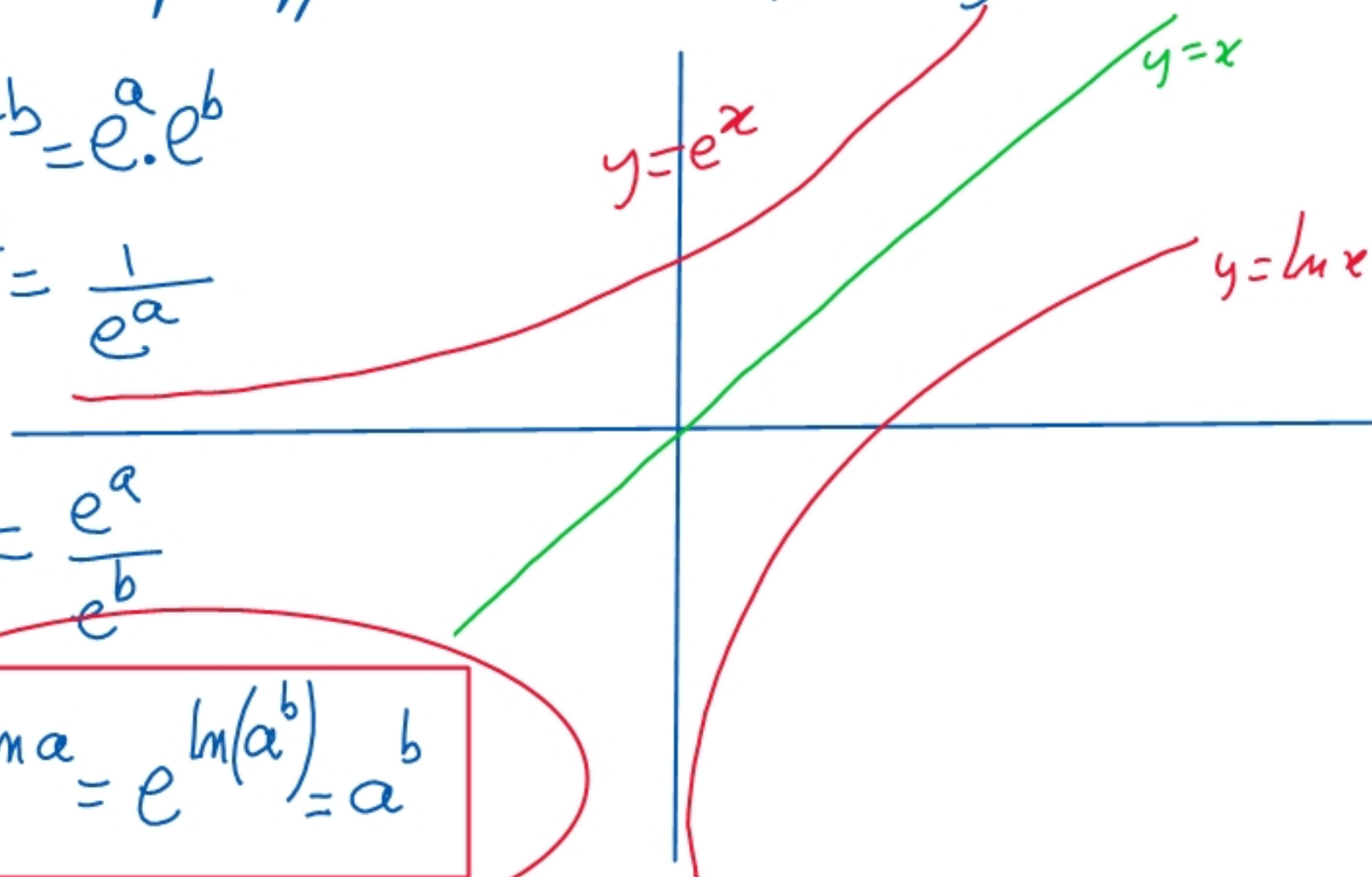
Rqne : Le dessin de la réciproque d'une fonction s'obtient en faisant la symétrie par rapport à la droite d'équation $y=x$

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$$

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

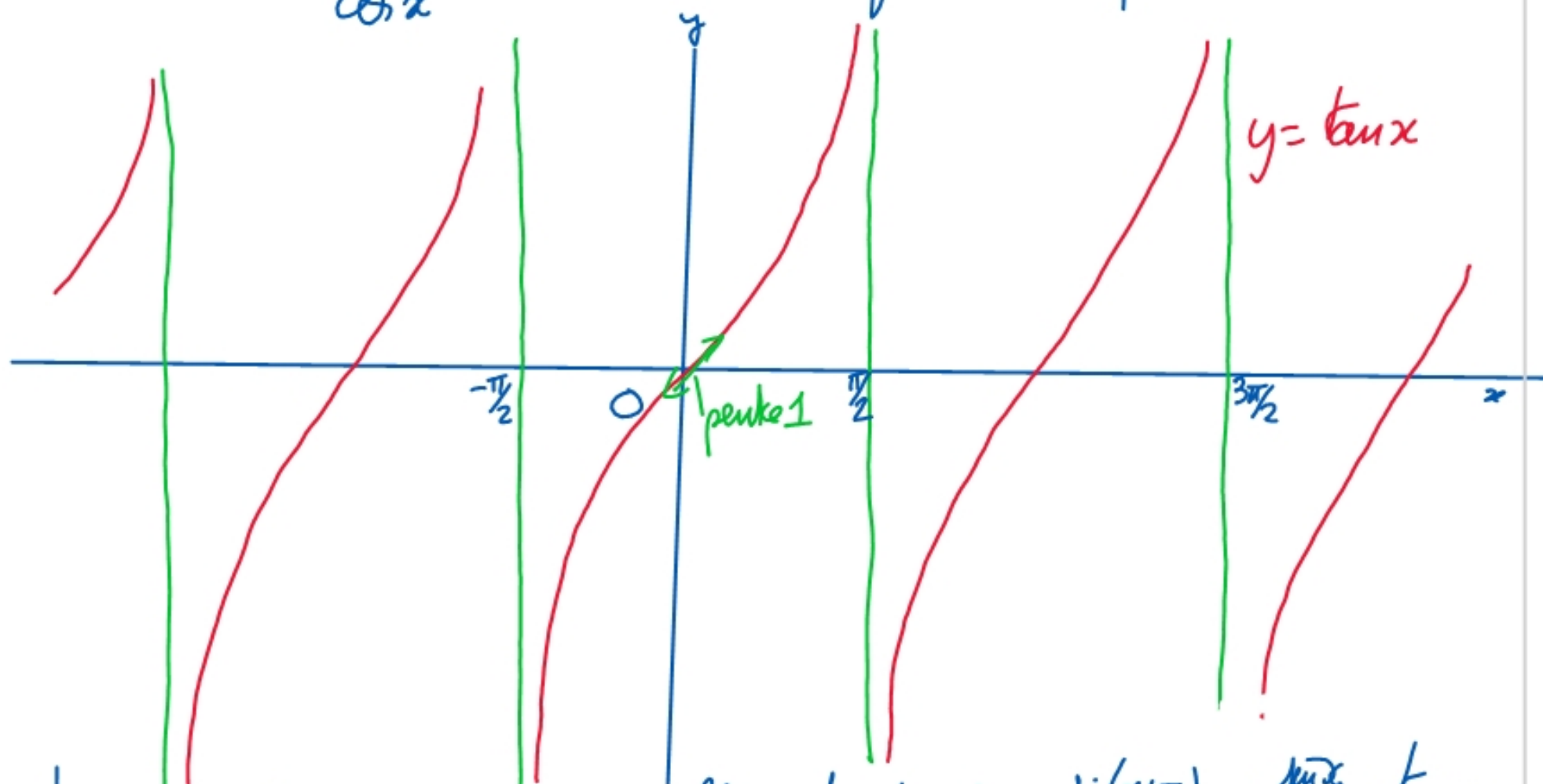
$$e^{b \ln a} = e^{\ln(a^b)} = a^b$$



7.5 La fonction $x \mapsto \tan x$

$$\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

L'ensemble de def est $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \right\}$

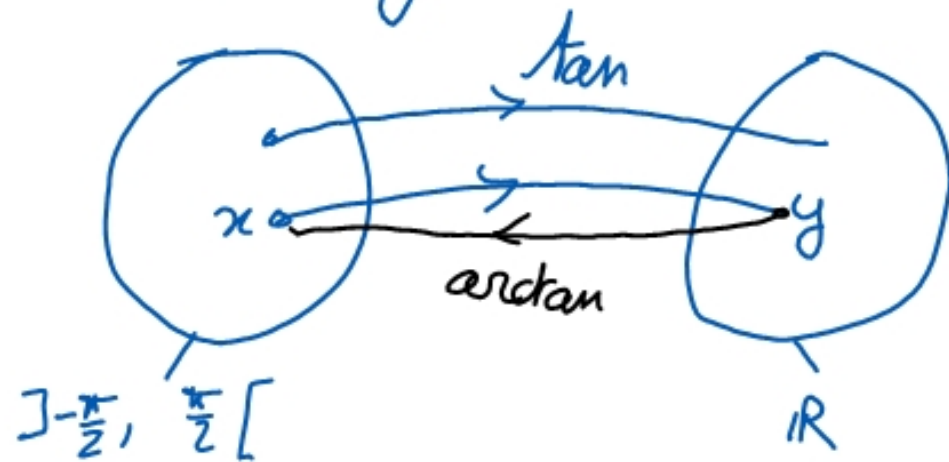


\tan est de période π en effet $\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$

On restreint la fonction \tan à $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ pour définir sa réciproque

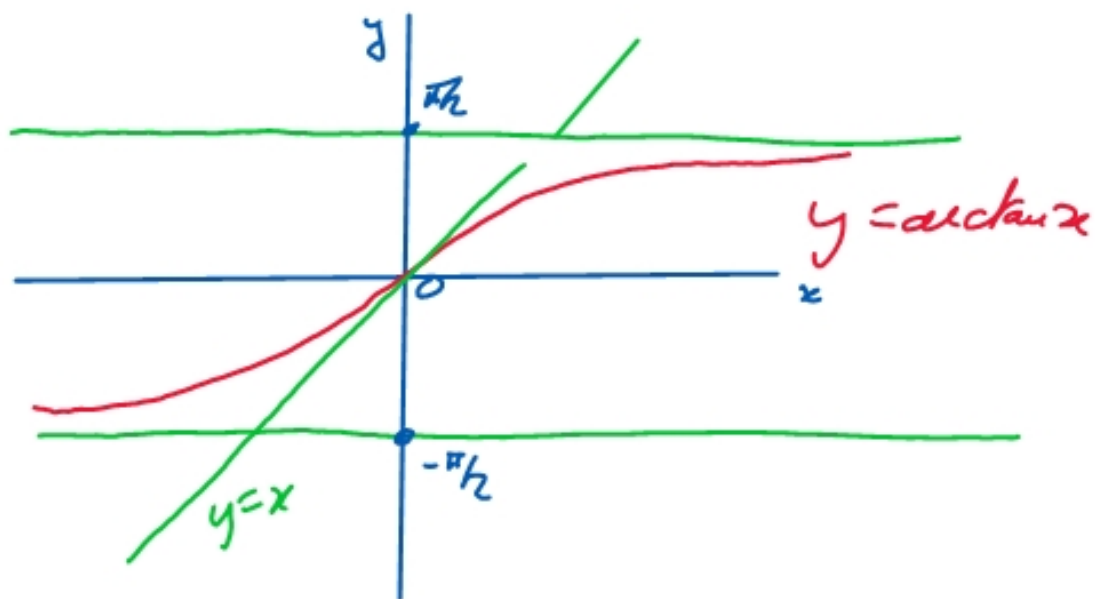
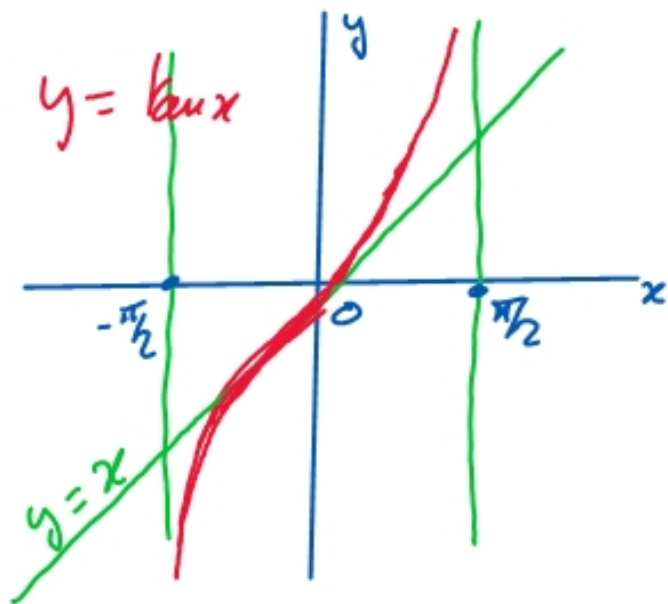
Cette réciproque est notée \arctan

$$\tan(x) = y \iff \arctan(y) = x$$



$$\tan(\arctan(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\arctan(\tan(x)) = x \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$



$$\tan \left| \begin{array}{l}]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \tan x \end{array} \right.$$

$$\arctan \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x \mapsto \arctan x \end{array} \right.$$

Il y a une symétrie / 0, donc \tan et \arctan sont impaires

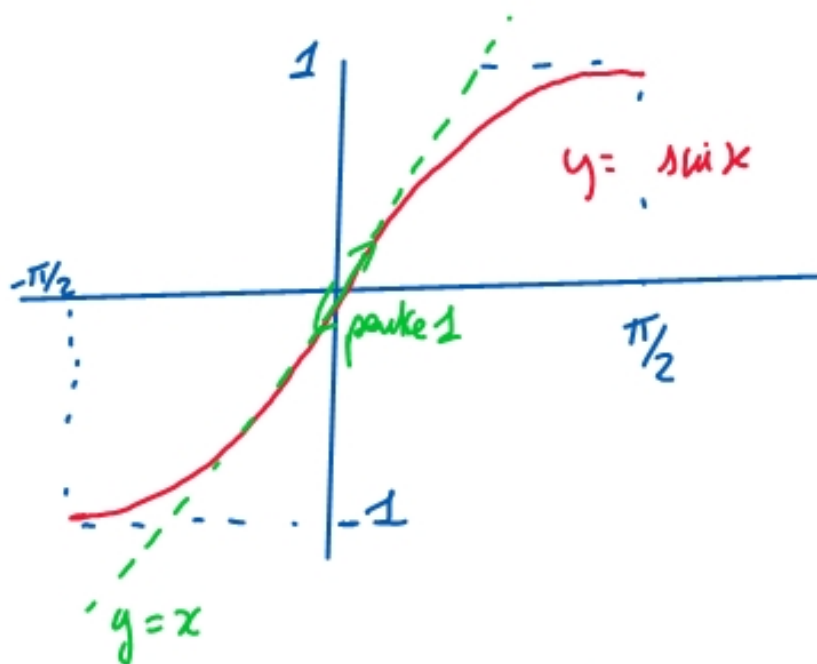
$$\forall x \quad \tan(-x) = -\tan(x) \quad \text{et} \quad \arctan(-x) = -\arctan(x)$$

$$\left(\cos x = \frac{1 - \tan^2(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{2 \tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} \right)$$

7.6 La fonction arcsin

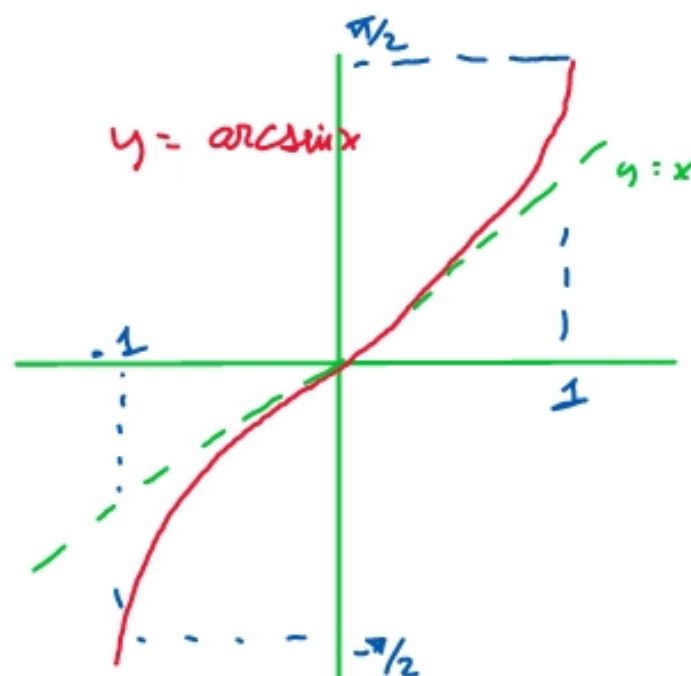
(c'est la réciproque de :

$$f \left| \begin{array}{l} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1] \\ x \mapsto \sin x \end{array} \right.$$



$$\sin(\arcsin x) = x, \forall x \in [-1, 1]$$

$$\arcsin(\sin x) = x \Leftrightarrow \sin(x) = y$$



$$\arcsin \left| \begin{array}{l} [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x \mapsto \arcsin x \end{array} \right.$$

$$\arcsin(\sin x) = x, \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$