

64 Attention

• aux $\sqrt{\quad}$

• aux fractions (on ne divise pas par 0)

• aux simplifications (on ne simplifie pas par 0).

• Aux inégalités $\triangleq 2 \leq 3$ mais $-3 \leq -2$

remarque: On résout d'abord l'égalité

remarque: Pour montrer $f(x) \leq g(x)$, on étudie

la fonction $g(x) - f(x)$ (ou $f(x) - g(x)$)

ex 1: Quels sont les réels x tels que $x^2 - 3x + 2 < 0$?

• On résout d'abord: $x^2 - 3x + 2 = 0$

$$\Delta = 9 - 8 = 1 \quad 2 \text{ racines} \quad \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

• On fait un tableau de signe

x	$-\infty$	0	1	1.5	2	3	$+\infty$
$f(x) = x^2 - 3x + 2$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	
		$f(0) = 2$				$f(3) = 9 - 9 + 2 = 2$	

$$\mathcal{J} =]1, 2[$$

$$f(1.5) = 2.25 - 4.5 + 2 = -0.25 < 0$$

Ex 2: Montrer que $\forall x > 0 \quad \ln(1+x) < x$

On étudie $f(x) = \ln(1+x) - x$ $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1+x}{1+x} = \frac{1 - (1+x)}{1+x} = \frac{-x}{1+x} < 0 \quad \text{car } x > 0$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	0	\searrow

$$f(0) = \ln(1) - 0 = 0$$

donc $\forall x > 0, f(x) < 0$

$$\Rightarrow \ln(1+x) - x < 0$$

$\forall x > 0 \quad \ln(1+x) < x$

• Attention aux formes indéterminées (dans les calculs de limite)

$$\infty - \infty$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$+\infty + \infty = +\infty$$

$$0 \cdot \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) \cdot (x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) \cdot (x) = 0$$

$$\frac{0}{0}$$

$$0$$

$$1^\infty$$

$$= e^{\infty \cdot 0}$$

$$\frac{\infty}{0} = \infty$$

6.5 Pour le calcul des limites. Mettre le plus grand en

facteur

$$\text{ex 1: } \lim_{0^+} \frac{\sqrt{x^4 + x^2}}{2x^2 + x} = \frac{0}{0}$$

Annotations: "le plus grand" circled in blue above the numerator, "le plus grand" circled in blue below the denominator.

Forme indéterminée
(F.I.)

$$\lim_{+\infty} \frac{\sqrt{x^4 + x^2}}{2x^2 + x} = \frac{\infty}{\infty} \quad (\text{F.I.})$$

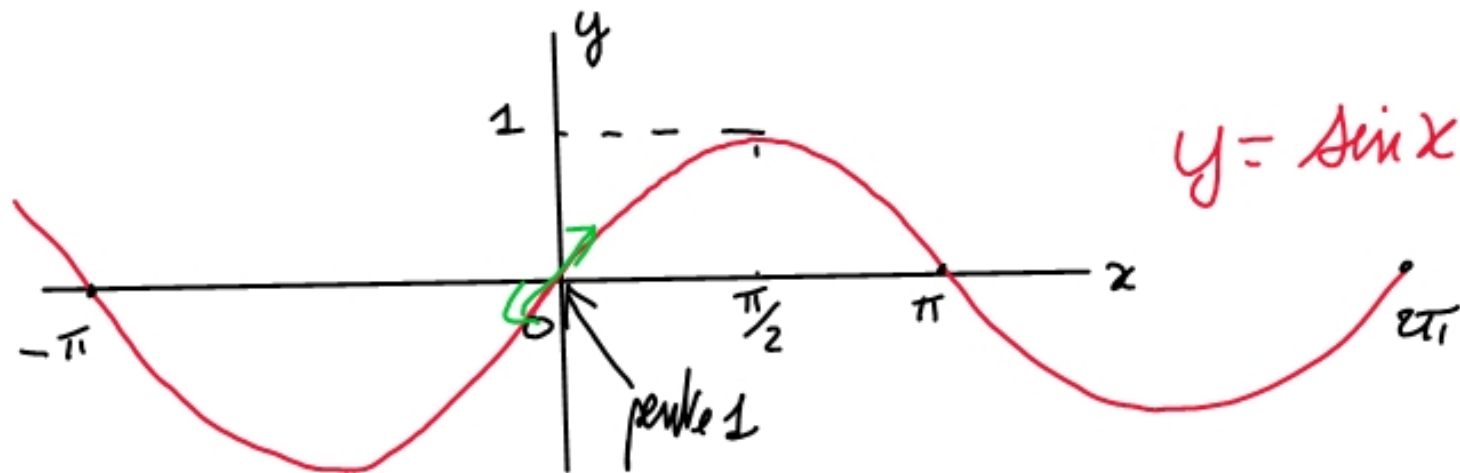
Annotations: "le plus grand" circled in blue above the numerator, "le plus grand" circled in blue below the denominator.

$$\begin{aligned}\lim_{0^+} \frac{\sqrt{x^4+x^2}}{2x^2+x} &= \lim_{0^+} \frac{\sqrt{x^2(x^2+1)}}{x(2x+1)} = \lim_{0^+} \frac{\cancel{x} \sqrt{x^2+1}}{\cancel{x} (2x+1)} \\ &= \frac{1}{1} = \underline{1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\infty} \frac{\sqrt{x^4+x^2}}{2x^2+x} &= \lim_{\infty} \frac{\sqrt{x^4(1+\frac{1}{x^2})}}{x^2(2+\frac{1}{x})} = \lim_{\infty} \frac{\cancel{x^2} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x^2} (2+\frac{1}{x})} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

7 Rappels sur les fonctions classiques

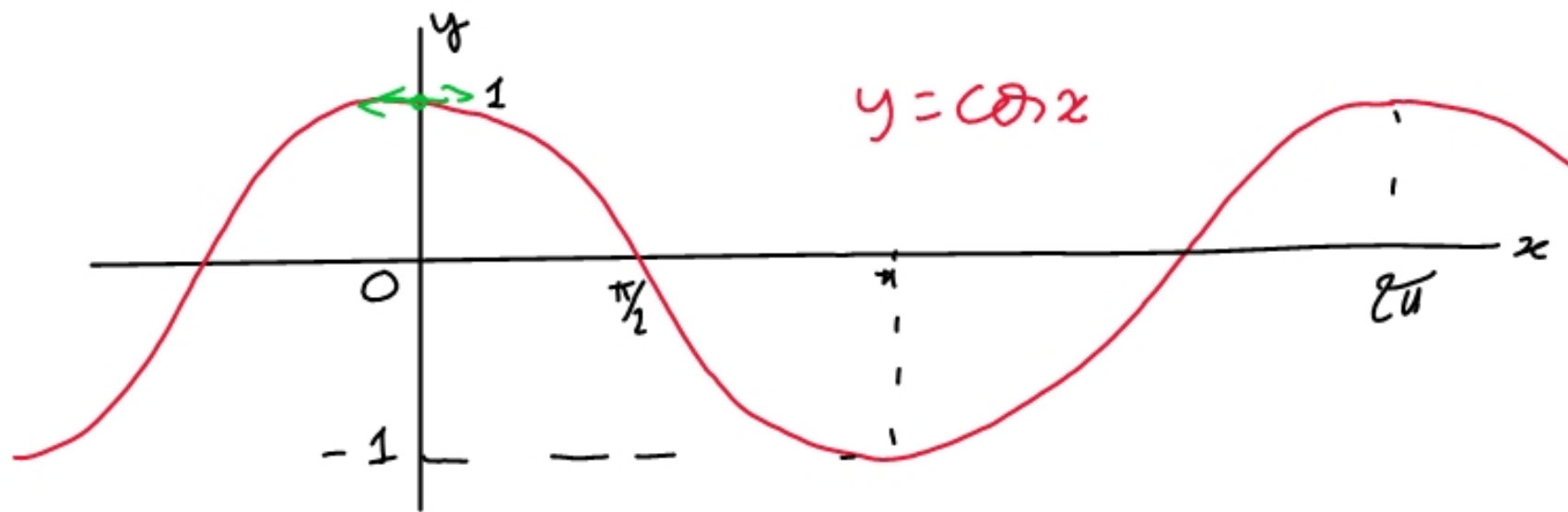
7.1: Sinus et Cosinus



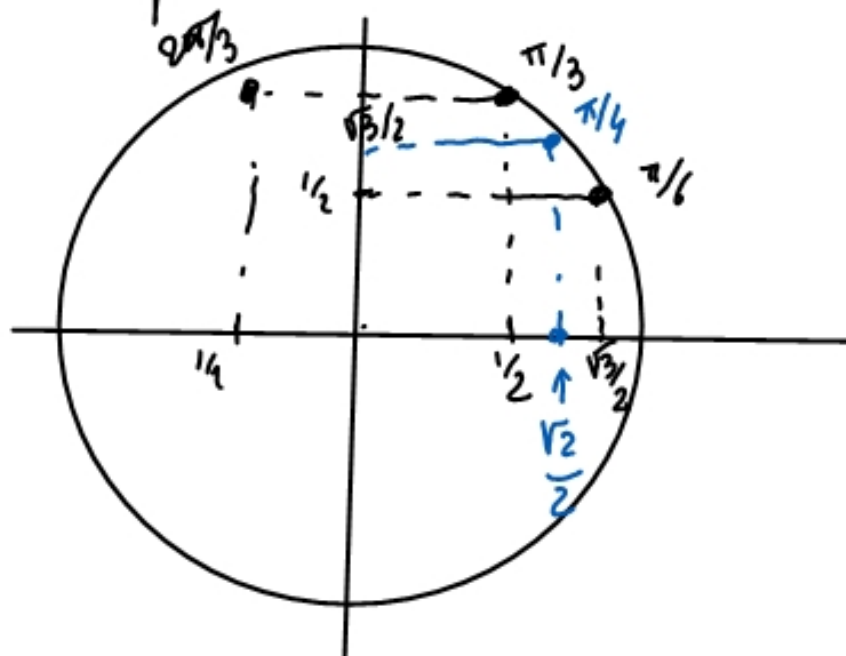
\sin est 2π -périodique car $\forall x \in \mathbb{R} \sin(x+2\pi) = \sin(x)$

\sin est impair car il y a une symétrie / 0

$f(x) = \sin(\omega x)$
la plus petite période $\rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$
 ω s'appelle la pulsation



\cos est pair et 2π -périodique



Formules de Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\Rightarrow 2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$$

$$\text{et } 2i\sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\text{et } \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i\sin(a+b) = e^{ia+ib} = e^{ia} \cdot e^{ib}$$

$$= (\cos a + i\sin a) \cdot (\cos b + i\sin b)$$

$$= \cos a \cos b - \sin a \sin b + i(\sin a \cos b + \sin b \cos a)$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$



$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$