

uu

ex 3: ① Trouver les racines du polynôme $P(z) = iz^2 - 5z + 1 - 7i$

② Factoriser $P(z)$

$$\textcircled{1} \Delta = (-5)^2 - 4i(1-7i) = 25 - 4i - 28 = -3 - 4i = (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + i2ab$$

$$|\Delta| \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_1 + L_3: 2a^2 = 2 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow \underline{a = \pm 1} \\ L_3 - L_1: 2b^2 = 8 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow \underline{b = \pm 2} \end{array}$$

avec L_2 : a et b ont un signe opposé : donc les racines carrées de Δ sont $\pm(1-2i)$

les racines de $P(z)$ sont $\frac{5 \pm (1-2i)}{2i}$

$$\begin{aligned} \frac{6-2i}{2i} &= \frac{3-i}{i} \cdot \frac{\lambda i}{\lambda i} = \frac{3i+1}{-1} \\ \frac{4+2i}{2i} &= \frac{2+i}{i} \cdot \frac{\lambda i}{\lambda i} = \frac{2i-1}{-1} \end{aligned}$$

les deux racines de $P(z)$ sont $-1-3i$ et $1-2i$

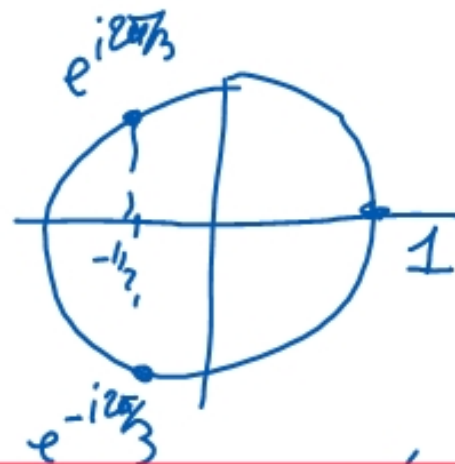
- $1-3i$ est une racine de $P(z)$, donc on peut factoriser par $z+1+3i$
 $1-2i$ $z-1+2i$

$$P(z) = \underline{i} z^2 - 5z + 1 - 7i = \underline{i} (z+1+3i)(z-1+2i)$$

IV Racines n-ièmes d'un nombre complexe

ex: $1^3 = (e^{i\frac{2\pi}{3}})^3 = (e^{-i\frac{2\pi}{3}})^3 = 1$

1 a trois racines cubiques: $1, e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$



T

les racines n -ièmes de $Z = R e^{i\theta}$ sont les $Z_k = R^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$
 où $k=0, 1, \dots, n-1$

en effet: $(Z_k)^n = R \cdot e^{i(\theta + 2k\pi)} = R e^{i\theta} = Z$

En fait, on cherche les $z = re^{i\varphi}$ tels que $z^n = Z = Re^{i\theta}$

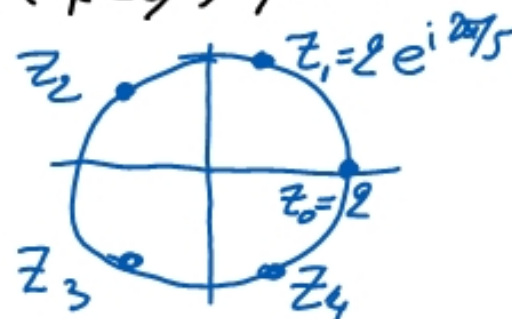
$$(re^{i\varphi})^n = Re^{i\theta}$$

$$r^n e^{in\varphi} = Re^{i\theta} \Rightarrow \begin{cases} r^n = R \\ n\varphi = \theta + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = R^{1/n} \\ \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

ex1: Trouver les racines complexes de $Z = 32 = 32e^{i0}$
c'est à dire les z tels que $z^5 = 32$

Solutions: $Z_k = 32^{1/5} \cdot e^{i(\frac{0}{5} + \frac{2k\pi}{5})}$ où $k=0, 1, 2, 3$ ou 4

$$Z_k = 2e^{i\frac{2k\pi}{5}} \text{ où } k=0, 1, \dots, 4$$



Ex 2: Trouver les cinq racines 5^{èmes} de $Z = -32$

$$Z = -32 = 32e^{i\pi} = 32e^{i(\pi + 2k\pi)} \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

On cherche les $z = re^{i\theta}$ tels que $z^5 = Z$ c-à-d

$$\begin{cases} r^5 = 32 = 2^5 \\ e^{i5\theta} = e^{i(\pi + 2k\pi)} \end{cases}$$

$$\downarrow r^5 e^{i5\theta}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5} \quad \text{où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

solutions $Z_k = 2e^{i(\frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5})}$

où $k = 0, 1, \dots, 4$

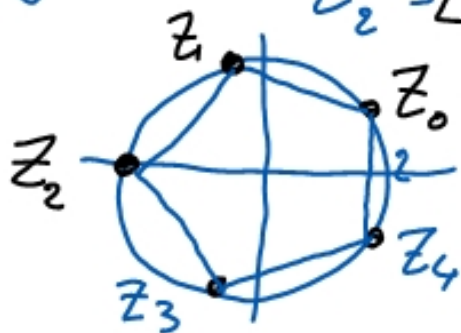
$$Z_0 = 2e^{i\pi/5}$$

$$Z_1 = 2e^{i3\pi/5}$$

$$Z_2 = 2e^{i\pi} = -1$$

$$Z_3 = 2e^{i7\pi/5}$$

$$Z_4 = 2e^{i9\pi/5}$$



II La somme des racines $n^{\text{ième}}$ d'un complexe vaut 0

Les racines $n^{\text{ième}}$ du complexe $Z = Re^{i\theta}$ sont les

$$Z_k = R^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \text{ où } k=0, 1, \dots, n-1.$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} Z_k = \sum_{k=0}^{n-1} R^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} \cdot e^{i\frac{2k\pi}{n}} = R^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

$$= R^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{2\pi}{n}} \right)^k \right)$$

somme partielle géométrique de raison $a = e^{i\frac{2\pi}{n}}$

$$= R^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} (1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}) = R^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

$$= R^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} \frac{e^{i2\pi} - 1}{a - 1} = R^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} \frac{1 - 1}{a - 1} = 0 \quad \square$$

ex 3: Trouver les z tels que $(z-i)^5 = (z+i)^5$

si $z=i$ $0 = (e^i)^5 = 32i$?? i n'est pas solution.
 $z-i \neq 0$

$$(z-i)^5 = (z+i)^5 \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^5 = 1 \text{ . On pose } Z = \frac{z+i}{z-i} = e^{i0}$$

les 5 sols sont $Z_k = e^{i\left(\frac{0}{5} + \frac{2k\pi}{5}\right)} = e^{i\frac{2k\pi}{5}}$ où $k=0,1,\dots,4$

$$\text{"} \frac{z_R + i}{z_R - i} = e^{i\frac{2k\pi}{5}} \Rightarrow z_R + i = (z_R - i)e^{i\frac{2k\pi}{5}}$$

$$\Rightarrow z_R + i = z_R e^{i\frac{2k\pi}{5}} - i e^{i\frac{2k\pi}{5}} \Rightarrow i + i e^{i\frac{2k\pi}{5}} = z_R e^{i\frac{2k\pi}{5}} - z_R$$

$$\Rightarrow i(1 + e^{i\frac{2k\pi}{5}}) = z_R(e^{i\frac{2k\pi}{5}} - 1) \Rightarrow z_R = \frac{i(1 + e^{i\frac{2k\pi}{5}})}{e^{i\frac{2k\pi}{5}} - 1} \text{ où } k = \cancel{0}, 1, \dots, 4$$

$$z_k = \frac{i e^{i k \pi / 5} (e^{-i k \pi / 5} + e^{i k \pi / 5})}{e^{i k \pi / 5} (e^{i k \pi / 5} - e^{-i k \pi / 5})} = \frac{i 2 \cos(k \pi / 5)}{2i \sin(k \pi / 5)}$$

If ya 4 solutions :

$$z_k = \frac{\cos(k \pi / 5)}{\sin(k \pi / 5)} \text{ for } k=1, 2, 3 \text{ or } 4$$