

1. ad)

Benjamin

II forme trigonométrique (ou exponentielle)

$$a+ib = \underbrace{r}_{\text{module}} e^{i\theta}$$

forme algébrique

forme trigo

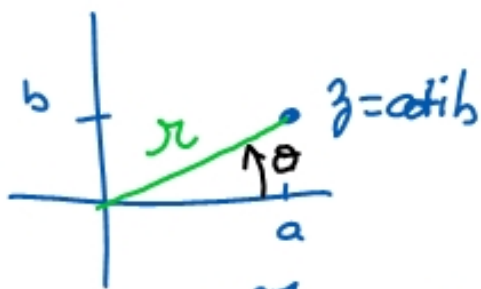
argument

notation : le module de $z = a+ib$ se note $|z|$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

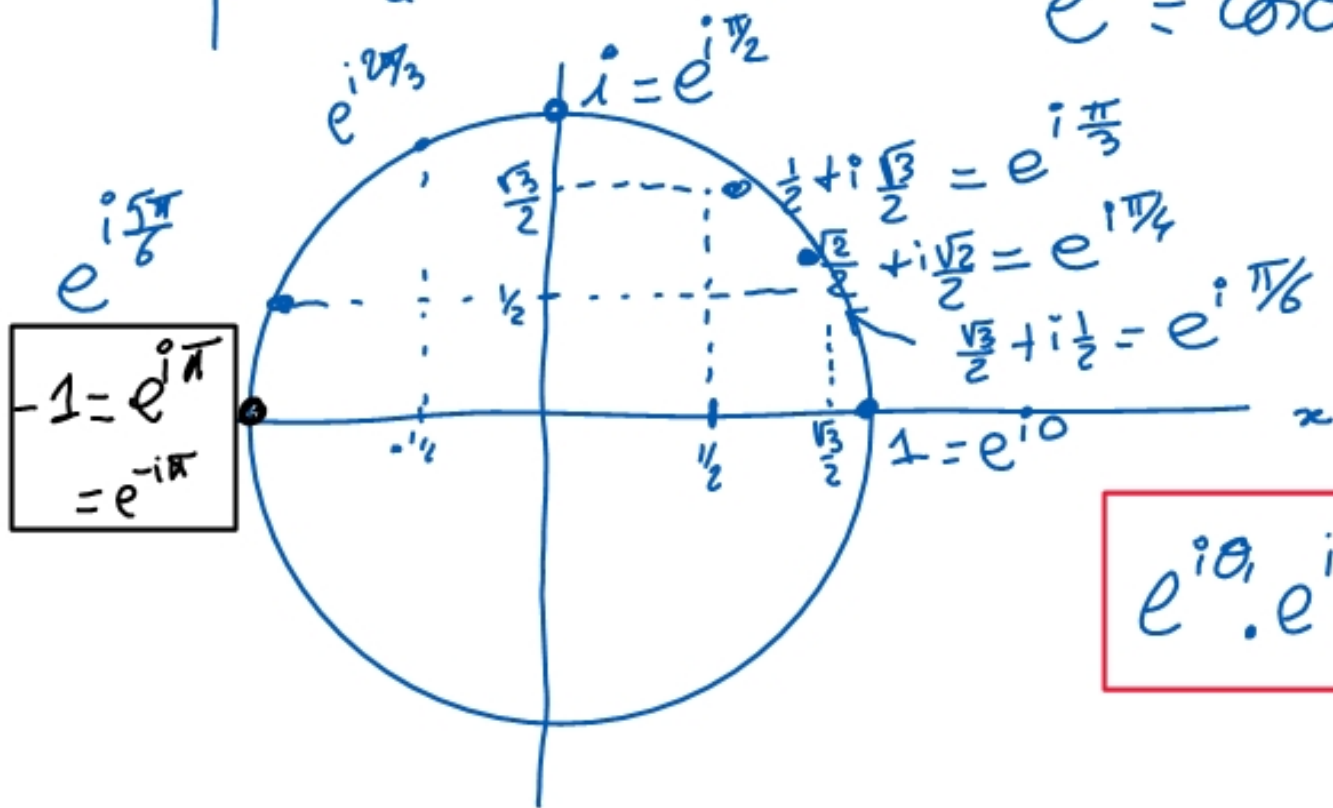
l'argument de $z = a+ib$ se note $\arg(z)$

$$\arg(a+ib) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{quand } a > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \pm \pi & \text{quand } a < 0 \end{cases}$$



rappel: $e^{i(\theta+2\pi)} = e^{i\theta}$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$



$$\begin{aligned} (e^{i\theta})^2 &= e^{i2\theta} \\ (e^{i\theta})^n &= e^{in\theta} \end{aligned}$$

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Convention: $\arg(z) \in]-\pi; \pi]$

ex: $\arg(e^{i2\pi}) = 0$ $\arg(e^{i3\pi}) = \pi$

$\arg(e^{i2021\pi}) = \pi$ $\arg(-1) = \arg(e^{i\pi}) = \arg(e^{-i\pi}) = \pi$

ex 1: Montrez que $\arctan(\frac{1}{4}) + \arctan(\frac{2}{3}) = \arctan(\frac{11}{10})$

$$\arctan(\frac{1}{4}) + \arctan(\frac{2}{3}) = \arg(4+i) + \arg(3+2i)$$
$$= \arg[(4+i) \cdot (3+2i)] \quad \text{car } e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2}$$

$$= \arg[12+8i+3i-2] = \arg(10+11i)$$

$$= \arctan(\frac{11}{10})$$

En Elec, i se note j

des exemples en dec

$$\arg\left(\frac{1}{(1+j\frac{\omega}{10}) \cdot j\frac{\omega}{2}}\right) = -\underbrace{\arctan\left(\frac{\omega/10}{1}\right)}_{=-\arctan(\frac{\omega}{10})} - 90^\circ$$

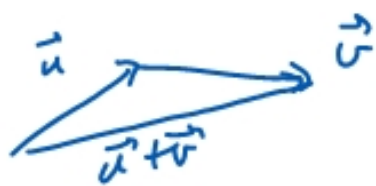
$$\arg\left(\frac{j\omega/0,25}{(1+j\omega/10)(1+2m j\omega/2 + (j\omega/2)^2)}\right) = 90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega}{10}\right) - \arctan\left(\frac{2m\omega/2}{1-\frac{\omega^2}{4}}\right)$$

formules concernant le module :

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$
$$|z| = | -z | = | \bar{z} | \quad \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Inégalité triangulaire :

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$



L'affixe de \vec{u} est notée $z_{\vec{u}} = x_{\vec{u}} + iy_{\vec{u}}$

L'affixe de \vec{v} est $z_{\vec{v}} = x_{\vec{v}} + iy_{\vec{v}}$

$$|z_{\vec{u}}| = \|\vec{u}\|$$

$$|z_{\vec{v}}| = \|\vec{v}\|$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

III Racines carrées d'un complexe

(les z tels que $z^2 = Z$ sont
les racines carrées de Z)

1^{ère} méthode : avec la forme kr

Les deux racines carrées de $z = re^{i\theta}$ sont

$$\pm \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

2^e méthode : avec la forme algébrique.

ex 1 : Trouver les 2 racines carrées de $Z = -3 - 4i$

car il les $z = a + ib$ tels que $z^2 = -3 - 4i$

$$z^2 = (a + ib)^2 = a^2 + i2ab - b^2 = -3 - 4i \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \end{cases}$$

Ruse: Module de $z^2 \rightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$$

$$L_1 + L_3 : 2a^2 = 2 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow \underline{a = \pm 1}$$

avec L_2 : Si $a = 1$, alors $b = -2$

Si $a = -1$, alors $b = 2$

$$z_1 = 1 - 2i$$

$$z_2 = -1 + 2i$$

les deux racines carrées de $Z = -3 - 4i$ sont $\pm (1 - 2i)$

ex 2: Calculer les racines carrées de $\sqrt{3}+i$ de 2 façons \neq .

En déduire les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$

$$\bullet Z = \sqrt{3}+i = (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + i2ab$$

$$\left. \begin{array}{l} a^2 - b^2 = \sqrt{3} \\ 2ab = 1 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{3+1} = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Méthode de} \\ \text{(a+ib)}^2 \end{array}$$

$$\text{avec } L_1 + L_3: 2a^2 = 2 + \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a = \pm \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$$

$$\text{avec } L_3 - L_1, 2b^2 = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow b = \pm \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$$

avec L_2 , on voit que a et b ont le même signe. donc les sols sont

$$\pm \left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} + i \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} \right)$$

• Avec la forme trigo: $Z = \sqrt{3}+i$

$$|Z| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2 \quad Z = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right)$$

$$Z = 2 e^{i\pi/6}$$

les deux sols sont $\pm \sqrt{2} e^{i\pi/12}$



$$\text{donc } \left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} + i \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} \right) = \left(\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} + i \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

$$= \pm \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$