

00

$$(11) \quad I = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t + 1} dx = \frac{\cos t}{\sin^2 t + 1} \int dx = \frac{\cos t}{\sin^2 t + 1} \cdot x + cte$$

$$(12) \quad \int \frac{1}{e^t} dt \quad \int e^{-t} dt = -e^{-t} + cte \quad \left| \begin{array}{l} \int \cos(2t) dt = \frac{\sin(2t)}{2} \\ \int \cos(2t+1) dt = \frac{\sin(2t+1)}{2} \end{array} \right.$$

$$(13) \quad \int e^{2t+1} dt = \frac{e^{2t+1}}{2} + cte$$

$$(14) \quad I = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \quad \text{chgt } X=e^x \quad \frac{dX}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \frac{dX}{e^x}$$

$$I = \int \frac{e^x}{1+X^2} \frac{dX}{e^x} = \arctan(X) = \arctan(e^x)$$

$$(15) \quad I = \int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx \quad \text{chgt } X=\cos x \quad \frac{dX}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{-dX}{\sin x}$$

$$I = \int \frac{\sin x}{1+X^2} \frac{-dX}{\sin x} = -\arctan X + cte = -\underline{\underline{\arctan(\cos x) + cte}}$$

$$(16) \quad I = \int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \quad \text{chgt } X = \cos x \quad dx = -\frac{dX}{\sin x}$$

$$I = \int \frac{\cancel{\sin x}}{X} \frac{-dX}{\cancel{\sin x}} = -\ln|X| + \text{cte} = -\ln|\cos x| + \text{cte}$$

$$(17) \quad J = \int \tan x \, dx = \tan x \int dx = \tan x \cdot x + \text{cte}$$

$$(18) \quad I = \int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} \, dx \quad \text{chgt } X = \ln x \quad \frac{dX}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x \, dX$$

$$I = \int \frac{1}{x\sqrt{1-X^2}} \cdot x \, dX = \arcsin X + \text{cte} \quad (\text{formulaire}) \\ = \arcsin(\ln x) + \text{cte}$$

$$(19) \quad I = \int \frac{1}{x \ln x} \, dx \quad \text{chgt } X = \ln x \quad dx = x \, dX$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{1}{x \cdot x} \cdot x \, dX = \ln|X| + \text{cte} = \underline{\underline{\ln|\ln x| + \text{cte}}}$$

$$(20) \quad I = \int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx \quad \text{let } X = \ln x \quad dx = x dx$$

$$= \int \frac{1}{x X \ln X} x dx = \int \frac{1}{X \ln X} dX = \ln |\ln X|$$

$$= \ln |\ln(\ln x)| + \text{conste}$$

IV les équivalents

Rappel: f est négligeable devant g lorsque $\lim \frac{f}{g} = 0$ notation: $f = o(g)$

def: f est équivalente à g lorsque $\lim \frac{f}{g} = 1$ $f \sim g$

exemple: $\sin x \underset{0}{\sim} x$ car $\lim_0 \frac{\sin x}{x} = \lim_0 \frac{x + o(x)}{x} = \lim_0 \frac{x(1+o(1))}{x} = 1$

$2x + 3x^2 \underset{0}{\sim} 2x$ car $\frac{2x + 3x^2}{2x} = \frac{x(2 + 3x)}{2x} \xrightarrow{0} \frac{2}{2} = 1$

$2x + 3x^2 \underset{+\infty}{\sim} 3x^2$ car $\frac{2x + 3x^2}{3x^2} = \frac{2}{3x} + 1 \xrightarrow{+\infty} 0 + 1 = 1$

$2x + 3x^2 \underset{x \rightarrow 1}{\sim} 5$ car $\frac{2x + 3x^2}{5} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{5}{5} = 1$

\square Si f est négligeable devant g (au voisinage de a), alors
 $f+g \underset{x \rightarrow a}{\sim} g$

$$\square \frac{f+g}{g} = \frac{f}{g} + 1 \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 + 1 = 1 \square$$

↳ car f est négligeable devant g

donc

$$f + o(f) \sim f$$

on appelle ça la
partie principale de f

\Rightarrow Une fonction est équivalente au 1^{er} terme non nul de son DL

ex: $\sin x \underset{0}{\sim} x$ $\cos x \underset{0}{\sim} 1$ $\tan x \underset{0}{\sim} x$ $\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x$

$$\frac{1}{1+x} \underset{0}{\sim} 1 \quad e^x \underset{0}{\sim} 1$$

$$\boxed{T_2} \quad \text{Si } f \sim_a g, \text{ alors } \lim_a f(x) = \lim_a g(x)$$

$$\boxed{\left[\frac{f}{g} \xrightarrow{a} 1 \Rightarrow \frac{\lim_a f}{\lim_a g} = 1 \Rightarrow \lim_a f = \lim_a g \right]}$$

$$\boxed{T_3} \quad \begin{array}{l} \text{Si } \left\{ \begin{array}{l} F \sim_a f \\ G \sim_a g \end{array} \right. \text{ alors } F \cdot G \sim_a f \cdot g \\ \text{et } \frac{F}{G} \sim_a \frac{f}{g} \end{array}$$

Les \sim sont pratiques qd on a des produits et des quotients

on peut additionner, multiplier, diviser, composer et

intégrer les DL, mais pour les \sim , on n'utilise que

les produits et les quotients



example: $\lim_{+\infty} \frac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{2x^3 - 5} = ?$

$$\frac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{2x^3 - 5} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2} \xrightarrow{+\infty} \frac{1}{2}$$

$\lim_{+\infty} \frac{2^x + x^2}{x^3 + x^2} = ?$

$2^x + x^2 \underset{+\infty}{\sim} 2^x$ car $\frac{2^x + x^2}{2^x} = 1 + \frac{x^2}{2^x} \xrightarrow{+\infty} 1 + 0 = 1$
↳ T.C.C.

$x^3 + x^2 \underset{+\infty}{\sim} x^3$ car $\frac{x^3 + x^2}{x^3} = 1 + \frac{1}{x} \xrightarrow{+\infty} 1 + 0 = 1$

$\Rightarrow \frac{2^x + x^2}{x^3 + x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2^x}{x^3} \xrightarrow{+\infty} +\infty$ (T.C.C)

Taylor en 0 : $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$

pour une fonction dérivable $n+1$ fois.

f dérivée $n+1$ fois

\square initialisation : pour $n=0$ $f(x) = f(0) + \int_0^x 1 f'(t) dt$?

Oui car $\int_0^x f'(t) dt = [f(t)]_0^x = f(x) - f(0)$

Hérédité : On prend un $n \geq 0$. On suppose que $f(x) = f(0) + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$

(On veut montrer que : $f(x) = f(0) + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt$)

On doit donc montrer que $\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt$

On fait une IID

$$u = f^{(n+1)}(t)$$

$$v' = \frac{(x-t)^n}{n!}$$

$$u' = f^{(n+2)}(t)$$

$$v = -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\left(\text{car } \int \frac{(x-t)^n}{n!} dt = \frac{1}{n!} \int (x-t)^n dt \right)$$

$$= -\frac{1}{n!} \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} = -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$n! \cdot (n+1) = (n+1)!$$

$$\int_0^x u v' dt = \left[u v \right]_0^x - \int_0^x u' v dt = \left[-f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt$$

$$= 0 + \underbrace{f^{(n+1)}(0) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}_{\substack{\uparrow \\ \text{valeur en } x - \text{ valeur en } 0}} + \int_0^x \text{---} \quad \text{CQFD}$$

Conclusion: D'après le principe de récurrence, la formule est vraie pour tout $n \geq 0$]

Les nombres complexes

I Généralités

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a \text{ et } b \in \mathbb{R}\}$$

def: l'image du complexe $a + ib$ est le point de coordonnées (a, b)

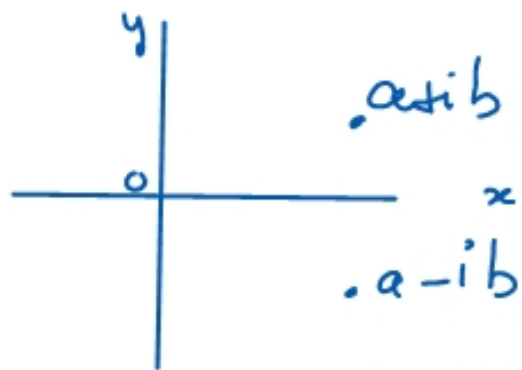
l'affiche du point $A(a, b)$ est le complexe $a + ib$

somme: $(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$

produit: $i \times i = -1$ $(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + ib \cdot id$
 $= ac - bd + i(ad + bc)$

conjugué: le conjugué de $z = a + ib$ est $\bar{z} = a - ib$

ex: le conjugué de $2 + 3i$ est $2 - 3i$ $\underline{2 + 3i = 2 - 3i}$



Faire le conjugué revient à faire la symétrique / l'axe des x

quotient: on multiplie en haut et en bas par le conjugué du dénominateur

$$\text{ex. } \frac{2+3i}{1-2i} = \frac{(2+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{2+3i+4i-6}{1^2+2^2} = \underline{\underline{\frac{-4+i7}{5}}}$$

$a+ib$ s'appelle la forme algébrique

($Re^{i\theta}$ est la forme trigonométrique ou la forme exponentielle)

formules avec le conjugué: $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ $\overline{zz'} = \overline{z} \overline{z'}$

$$\overline{\begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \overline{z} \\ \overline{z'} \end{pmatrix}$$