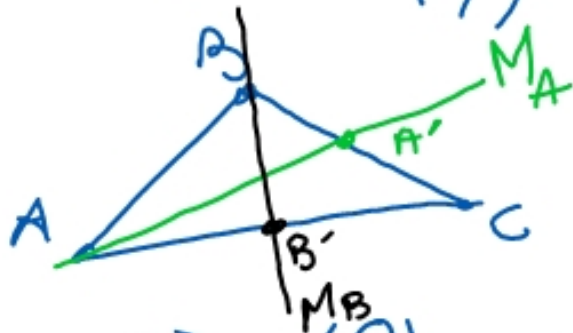


## IV le triangle

Exemple :  $A \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 14 \end{pmatrix}$   $C \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$



Médiane en A : Elle passe par A et par le milieu de  $[B, C]$  :  $A' = \frac{B+C}{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$

$$\vec{AA'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

est un vecteur directeur de  $M_A$ .

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ lui aussi}$$

eq paramétrique de

$$M_A : \begin{cases} x = 0 \\ y = t + 2 \\ z = 2t + 4 \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

Médiane en B :  $B' = \frac{A+C}{2} = (-2; 0, 5)$

$$\vec{BB'} = (-6, -12, -9) \in \vec{M_B}$$

$$\vec{v} = (2; 4; 3) \in \vec{M_B}$$

$$M_B : \begin{cases} x = 2t' - 2 \\ y = 4t' \\ z = 3t' + 5 \end{cases} \text{ où } t' \in \mathbb{R}$$

point d'intersection:

$$x = 0$$

$$y = t + 2$$

$$z = 2t + 4$$

$$x = 2t' - 2$$

$$y = 4t'$$

$$z = 3t' + 5$$

$$\Rightarrow t' = 1$$

$$\Downarrow y = 4$$

$$z = 8$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Verif:  $G = \frac{A+B+C}{3} = \frac{(0, 12, 24)}{3} = (0, 4, 8)$  ok

## V Cercles et sphères

Dans  $\mathbb{R}^2$ , le cercle de centre  $C(x_c, y_c)$ , de rayon  $R$  a pour eq cartésienne

$$\underline{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2}$$

Avec  $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$d(M, C) = R$$



ex: Trouver le centre et le rayon du cercle d'éq

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 50 = 0 \quad (E)$$

$$(E) \Leftrightarrow (x^2 - 6x) + (y^2 + 8y) - 50 = 0$$

$$[(x-3)^2 - 9] + [(y+4)^2 - 16] - 50 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = 75 = 5^2 \cdot 3 \quad \underline{R = 5\sqrt{3}}$$

$$\text{Centre : } \underline{C = (3; -4)}$$

Dans  $\mathbb{R}^3$ , l'éq cartésienne de la sphère de centre  $C(x_c; y_c; z_c)$  et rayon  $R$

est:  $(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 + (z-z_c)^2 = R^2$

$\Leftrightarrow$

$$d(C, M) = R$$

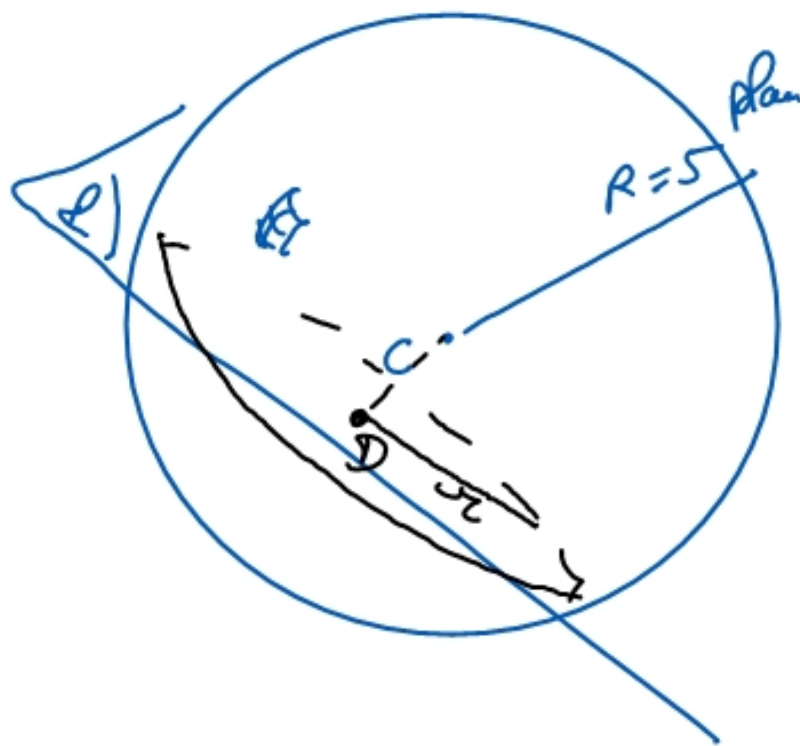
exemple :  $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 6x) + (y^2 + 8y) + z^2 = 0$$

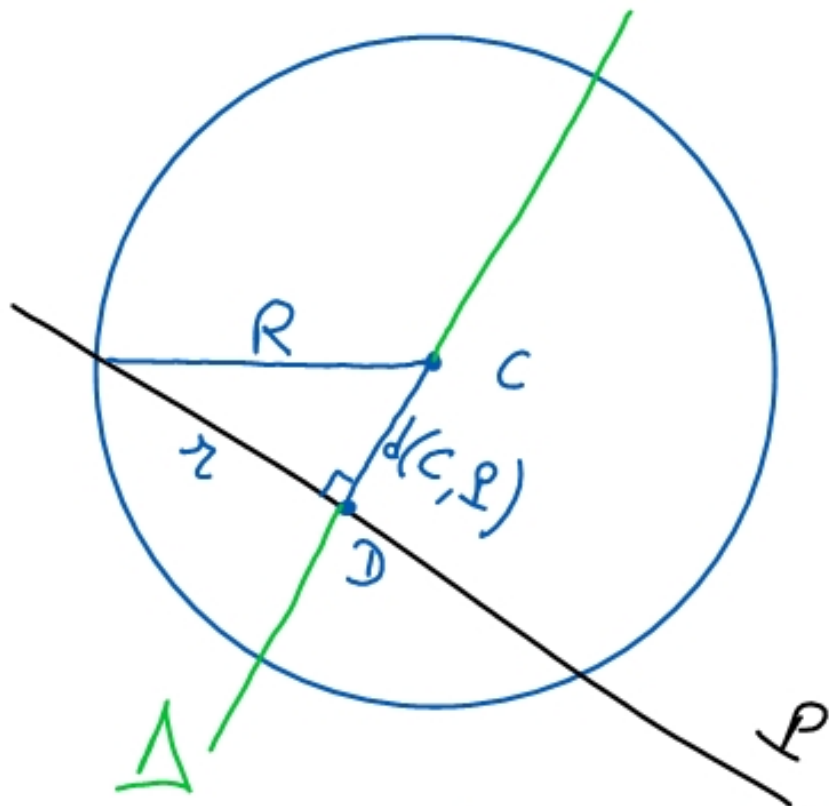
$$\Leftrightarrow [(x-3)^2 - 9] + [(y+4)^2 - 16] + z^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 25$$

Sphère de  
centre  $C(3, -4, 0)$   
de rayon 5



plan  $P: x+y+z+4=0$   
 $P'$  Intersection de  $P$  et  
de la sphère est un cercle.  
On veut son centre et  
son rayon



$$R=5$$

$r$  est le rayon du cercle

$$d(C, P) = \frac{|x_c + y_c + z_c + 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$R^2 = r^2 + d(C, P)^2$$

$$\Rightarrow r^2 = R^2 - d(C, P)^2 = 25 - 3 = 22$$

$$r = \sqrt{22}$$

Le plan  $\Delta$  passant par C et  $\perp$  à P. Un vecteur  $\perp$  à P est  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Delta \begin{cases} x = t + 3 \\ y = t - 4 \\ z = t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

le centre du cercle D est  $\Delta \cap P$

centre  $\mathcal{D}$ :

$$\begin{cases} x_{\mathcal{D}} = t_{\mathcal{D}} + 3 \\ y_{\mathcal{D}} = t_{\mathcal{D}} - 4 \\ z_{\mathcal{D}} = t_{\mathcal{D}} \\ x_{\mathcal{D}} + y_{\mathcal{D}} + z_{\mathcal{D}} + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow (t_{\mathcal{D}} + 3) + (t_{\mathcal{D}} - 4) + t_{\mathcal{D}} + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 3t_{\mathcal{D}} + 3 = 0 \Rightarrow t_{\mathcal{D}} = -1$$

$$\mathcal{D} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(vérif:  $\vec{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  est  $\perp$  au plan  $\mathcal{P}$ )

perimètre d'un cercle:  $2\pi R$

Area d'un disque:  $\pi R^2$

Volume de la sphere  $\frac{4}{3}\pi R^3$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{Lnx}{x^n} = 0, \quad \forall n > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{Lnx} = +\infty$$

moyen mnémotechnique :  
les puissances l'emportent sur le Ln

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad (n > 0)$$

ou

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad (n > 0)$$

l'expo l'emporte sur les puissances

$$e^x \simeq 2,7^x$$

$2^x$  est une exp

$x^2$  est une puissance

$$\frac{2^x}{x^2} \xrightarrow{+\infty} +\infty$$

ou

$$\frac{x^2}{2^x} \xrightarrow{+\infty} 0$$

Demo de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad (n > 0)$

II  $f(x) = \frac{x^n}{e^x}$  chgt  $X = e^x \Rightarrow x = \ln(X)$ .

$$f(x) = \frac{\ln(X)^n}{X} = \left( \frac{\ln X}{X^{\frac{1}{n}}} \right)^n \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0^n = 0$$

car  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X^{\frac{1}{n}}} = 0$

(T de comparaison des croissances)

(TCC)  $\updownarrow$

↑  
non standard

ex:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3^x}{x^4 + \ln x} = ?$

$\frac{+\infty}{+\infty}$  F.V.



$$\frac{2^x + 3^x}{x^4 + \ln x} = \frac{3^x \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^x + 1 \right]}{x^4 \left[ 1 + \frac{\ln x}{x^4} \right]}$$

$$\left[ \left(\frac{2}{3}\right)^x + 1 \right] \rightarrow 0 + 1 = 1$$

$$\frac{\ln x}{x^4} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{T de comp des puissances})$$

$$\Rightarrow \left[ 1 + \frac{\ln x}{x^4} \right] \rightarrow 1$$

$$\frac{3^x}{x^4} \xrightarrow{+\infty} +\infty \quad (\text{TCC})$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 3^x}{x^4 + \ln x} = +\infty \quad \left( +\infty \cdot \frac{1}{1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \cdot \ln x = 0$$

$$\left( x^n \xrightarrow{0^+} 0 \quad \ln x \xrightarrow{0^+} -\infty \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \cdot e^{-x} = 0$$

