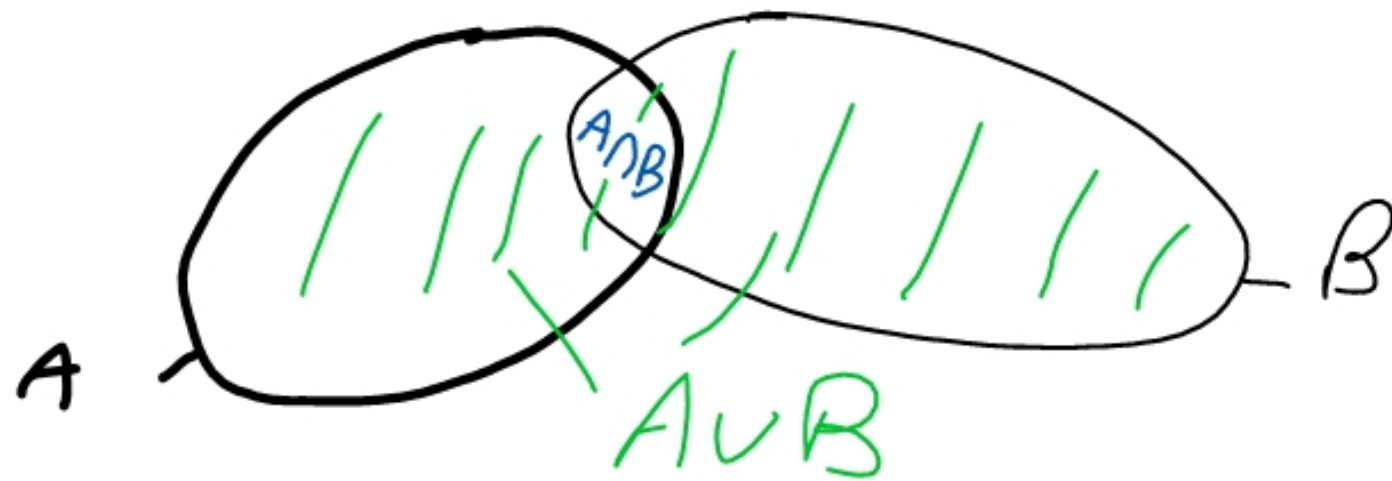




\subset : inclus. exemp $Q \subset R \subset \mathbb{E}$

\cap : intersection \cup : réunion



\sum : somme $\sum_{i=p}^{i=q} u_i = u_p + u_{p+1} + \dots + u_q$

\prod : produit $\prod_{i=p}^{i=q} u_i = u_p \cdot u_{p+1} \cdot u_{p+2} \cdot \dots \cdot u_q$

$$\prod_{i=1}^n i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$$

$$n! = \prod_{k=1}^n k$$

produit des nombres pairs:

$$\prod_{k=1}^n (2k) = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n = 2^n n!$$

$$2^n n! = (1 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdot \dots \cdot (2 \cdot n) = 2^n \cdot n!$$

$2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$

Il faut savoir retrouver cette formule.

produit des nombres impairs: $Q = \prod_{k=0}^n (2k+1) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)$

$$Q = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

À savoir & retrouver

IV le symbole Σ (Somme)

Rappel :
$$\sum_{k=p}^q u_k = u_p + u_{p+1} + \dots + u_q$$

$$\sum_{k=1}^n 1 = \underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ fois}} = n$$

$$\sum_{k=1}^n 1 = n$$

$$\sum_{k=0}^n 1 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pour } k=0}}{1} + \underset{\substack{\uparrow \\ k=1}}{1} + \dots + \underset{\substack{\uparrow \\ k=n}}{1} = n+1$$

$$\sum_{k=0}^n 1 = n+1$$

c'est le
nombre
de 1

$$\sum_{k=7}^{k=23} 1 = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{\substack{\text{pour } k=7 \\ k=8 \\ k=23}} = 23 - 7 + 1$$

$$\sum_{k=p}^q 1 = q - p + 1$$

c'est le nombre de termes pour aller de p , jusqu'à q

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Somme partielle arithmétique

nombre de termes

le premier (1)

+
le dernier (n)

$$\sum_{k=p}^q k = p + (p+1) + (p+2) + \dots + q = \frac{(q-p+1)(p+q)}{2}$$

Somme partielle géométrique:

$$\sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \begin{cases} \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} & \text{quand } x \neq 1 \\ n+1 & \text{quand } x = 1 \end{cases}$$

ex. $\sum_{k=p}^q 2^k = 2^p + 2^{p+1} + \dots + 2^q$

$$= 2^p (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{q-p})$$
$$= 2^p \frac{2^{q-p+1} - 1}{2 - 1} = 2^p (2^{q-p+1} - 1) = 2^{q+1} - 2^p$$

propriétés:
$$\sum_{k=0}^n (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=0}^n v_k$$

$$\sum_{k=0}^n a \cdot u_k = a \sum_{k=0}^n u_k$$

On voit les cotés du symbole Σ , comme pour \int

ex:
$$\int_0^1 3x^5 dx = 3 \int_0^1 x^5 dx = 3 \left[\frac{x^6}{6} \right]_0^1 = 3 \left[\frac{1}{6} - \frac{0}{6} \right] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=0}^n 3k = 3 \sum_{k=0}^n k = 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

exemple: Calculer $S = \sum_{k=0}^n (2k+1)$ c'est la somme
des nombres impairs de 1 jusqu'à $2n+1$

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^n 2k + \sum_{k=0}^n 1 = 2 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 \\ &= 2 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) + (n+1) \\ &= n(n+1) + (n+1) \\ &= (n+1)[n+1] = (n+1)^2 \end{aligned}$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2$$

Changement d'indexation ou décalage

$$\sum_{k=3}^{k=8} u_k = \sum_{k=4}^{k=9} u_{k-1}$$

$$u_3 + u_4 + \dots + u_8$$

$$u_3 + u_4 + \dots + u_8$$

$$= \sum_{k=2}^{k=7} u_{k+1}$$

exemple: Calcul de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = S$

$(S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} \dots + \frac{1}{n(n+1)}) \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

$$S = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}$$

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \quad \text{— décalage}$$

$$= 1 + \cancel{\sum_{k=2}^n \frac{1}{k}} - \left(\cancel{\sum_{k=2}^n \frac{1}{k}} + \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1}$$

telescoping

$$S = \frac{n}{n+1}$$

Somme double

Calculer $S = \sum_{1 \leq i < j < n} 1$ (ici j varie de $i+1$ à n , avec $i \leq j$)

$$S = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n 1 \right) = \sum_{i=1}^n (n - i + 1) = \sum_{i=1}^n n - \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1$$

$\sum_{i=1}^n n = n \sum_{i=1}^n 1 = n \cdot n = n^2$

$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

$\sum_{i=1}^n 1 = n$

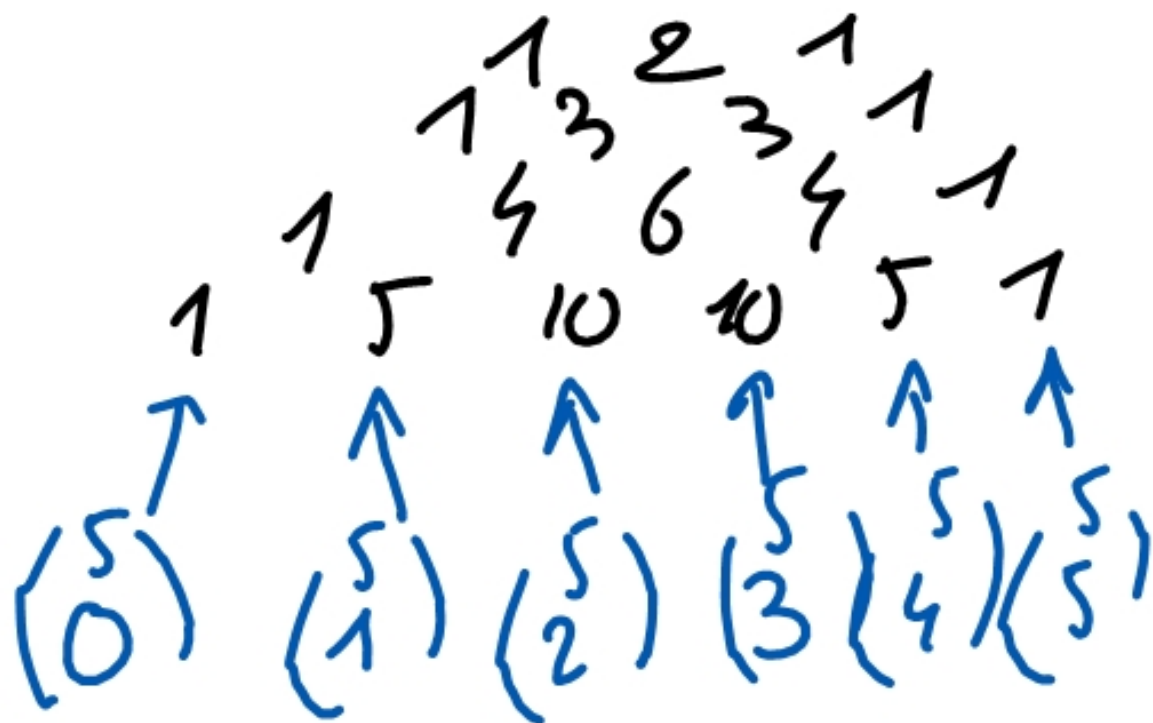
$$S = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{2n^2 - n(n+1) + 2n}{2} = \frac{2n^2 - n^2 - n + 2n}{2}$$

$$S = \frac{n^2 + n}{2}$$

V Un peu plus sur la formule du binôme

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

$$\text{ou } \binom{q}{p} = \frac{q!}{p!(q-p)!}$$



← ligne 5 les $\binom{5}{p}$

$$\binom{q}{p} = \binom{q}{q-p}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^k a^{n-k}$$

example: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k} = (2+3)^n = 5^n$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} 3^k = (2+3)^n = 5^n$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} = ?$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 3^{n-k} = (1+3)^n = 4^n$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

avec $n=5$

$$\text{Car } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k}$$