

$$f: \mathbb{C} \setminus \{2i\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \frac{z-1+i}{z-2i}$$

Je prends $y \in \mathbb{C}$

Je cherche ses antécédents.

ca'd $\Leftrightarrow z \text{ tq } f(z) = y \Leftrightarrow \frac{z-1+i}{z-2i} = y$

$$\Leftrightarrow z-1+i = y(z-2i)$$

$$= yz - 2iy$$

$$z - yz = 1 - i - 2iy$$

$$z(1-y) = \dots$$

$$z = \frac{1-i-2iy}{1-y} \text{ qd } y \neq 1$$

Une sol qd $y \neq 1$

0 sol qd $y = 1$

$$f: \mathbb{C} \setminus \{2i\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

$$z \mapsto \frac{z-1+i}{z-2i} \text{ est bijet}$$

Wje
↙ sej

\Leftrightarrow antec' out 1 aut
1 n'a pas d'ant

$$(3) \quad xy - 2y = \ln x$$

$$\text{Hom: } y_{\text{H}} = A e^{\int \frac{2}{x} dx} = A e^{2 \ln x} = A e^{\ln(x^2)} = Ax^2$$

$$\text{Sol part. MVC } y_{\text{p}} = A(x) x^2 \quad y'_{\text{p}} = A'(x) x^2 + A(x) 2x$$

$$x y'_{\text{p}} - 2y_{\text{p}} = A(x) x^3 + A(x) 2x^2 - 2A(x) x^2 = \ln x$$

$$A'(x) = \frac{\ln x}{x^3} \quad A(x) = \int \ln x \cdot \frac{1}{x^3} dx \quad \text{Idd } \begin{cases} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x^{-3} & v = \frac{x^{-2}}{-2} \end{cases}$$

$$A(x) = \left[\ln x \frac{x^{-2}}{2} \right] + \int \frac{1}{x} \frac{x^{-2}}{2} dx$$

$$= -\frac{\ln x x^{-2}}{2} + \frac{1}{2} \int x^{-3} dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}$$

$$A(x) = \frac{-1 - 2 \ln x}{4x^2} \Rightarrow$$

$$y_{\text{p}} = \frac{-1 - 2 \ln x}{4}$$

Sols de l'eq complete.

$$y = Ax^2 + \frac{-1 - 2 \ln x}{4}$$

$$f(1) = A \cdot 1 + \frac{-1 - 0}{4} = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{à savoir} \quad \boxed{\tan x = x + o(x)}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \begin{array}{l} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \\ \hline 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \end{array}$$

$$- \left(x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} + o(x^5) \right) \quad \begin{array}{l} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots \end{array}$$

$$-\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{-1+3}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{120} - \frac{1}{24} = \frac{1-5}{120} = -\frac{4}{120}$$

$$-\frac{1}{30} + \frac{1}{6} = \frac{-1+5}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + o(x^5)$$

$$- \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} + o(x^5) \right)$$

$$\frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

$$\underline{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x^4 + \dots$$

Avec $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2})}{6}x^3 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots$$

ordre 1 : $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$

2.3 les règles de jeu des $\mathcal{O}(x)$

def : on dit que g est négligeable devant f lorsque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g}{f} = 0$$

notation : $g = \mathcal{O}(f)$

$$g = \mathcal{O}(1) \Leftrightarrow \frac{g}{1} \rightarrow 0 \Leftrightarrow g \rightarrow 0 \quad \underline{\mathcal{O}(1) \rightarrow 0}$$

$$g = \mathcal{O}(x) \Leftrightarrow \frac{g}{x} \rightarrow 0$$

Regel: $\mathcal{O}_1(x^4) + \mathcal{O}_2(x^4) = \mathcal{O}_3(x^4)$

$$\mathcal{O}(x^4) + \mathcal{O}(x^4) = \mathcal{O}(x^4)$$

$$\underline{x^2 \cdot \mathcal{O}(x^3) = \mathcal{O}(x^5)}$$

$$\underline{\text{cte} \cdot \mathcal{O}(x^4) = \mathcal{O}(x^4)}$$

$$\text{con } \frac{x^2 \mathcal{O}(x^3)}{x^5} = \frac{\mathcal{O}(x^3)}{x^3} \rightarrow 0$$

$$\underline{\mathcal{O}(x^2) \cdot \mathcal{O}(x^3) = \mathcal{O}(x^5)}$$

$$\mathcal{O}(x^3) + x^4 = \mathcal{O}(x^3)$$

$$\mathcal{O}(x^2) + \mathcal{O}(x^3) = \mathcal{O}(x^2)$$

$$2 \cdot \mathcal{O}(x^3) = \mathcal{O}(x^3)$$

⚠ densité.

$$\frac{\partial(x^2)}{\partial(x^3)} = \frac{x \partial(x)}{x \partial(x^2)} = \frac{x a_{11}}{x \partial(x)} = \frac{a_{11}}{x \partial(x)}$$

On ne simplifie pas $\frac{a_{11}}{a_{11}}$

ou $\frac{\partial(x^2)}{\partial(x^2)}$

C'est une F.I.!!

2.4 DLs ailleurs qu'en 0

On fait un chgt de variable pour ramener en 0

exempl. DL de $\ln x$ en $x=1$ à l'ordre 3

ceci $\ln(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 + \mathcal{O}(x-1)^3$
où les $a_i \in \mathbb{R}$

chgt $X = x - 1$



$x = 1 + X$

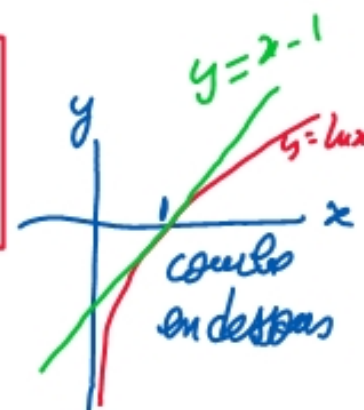
(Un DL en x_0 s'obtient avec le)
 chgt $X = x - x_0$

qd $x \rightarrow x_0, X \rightarrow 0$

$\ln(x) = \ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + \mathcal{O}(X^3)$

$\ln(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \mathcal{O}((x-1)^3)$

\uparrow
 DL en 1 à l'ordre 3 de $\ln x$



tg en 1 : $y = x - 1$

position de la courbe / tgte : $f(x) - (x-1) = -\frac{(x-1)^2}{2} + \dots < 0$
 \uparrow \uparrow
 courbe - tgte courbe en dessous

DL au voisinage de $x=2$ de $\ln x$ à l'ordre 3

chgt $x = x - 2 \Rightarrow x = 2 + x$

$$\ln(x) = \ln(2+x) = \ln\left(2\left(1+\frac{x}{2}\right)\right) \quad \text{RUSE}$$

$$= \ln 2 + \ln\left(1+\frac{x}{2}\right) = \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{3} + \mathcal{O}(x^3)$$

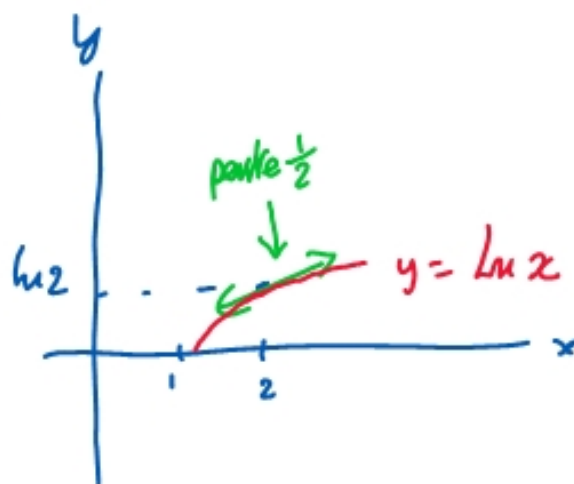
$$\ln x = \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(x-2)^3}{24} + \mathcal{O}((x-2)^3)$$

tg en 2: $y = \ln 2 + \frac{x-2}{2}$

$$y = \frac{x}{2} + \ln 2 - 1$$

position de la cbe / tge: courbe en dessous

car $-\frac{(x-2)^2}{8} < 0$



2.5 Formules de Taylor (Young)

def. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^n sur \mathbb{R} lorsque f est n fois dérivable et lorsque sa dérivée $n^{\text{ième}}$ est continue

Taylor: Si f est de classe C^n sur \mathbb{R} , et $x_0 \in \mathbb{R}$, alors

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \mathcal{O}((x-x_0)^{n+1})$$

tg en x_0 : $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

le terme non nul servant à donner la position de la tangente par rapport à la tg