

$$(2x+3)' = 2 \quad (x^5)' = 5x^4 \quad (2x+3)^5 = 5(2x+3)^4 \cdot \underline{2}$$

$$(f(u))' = f'(u) \cdot \underline{u'}$$

$$(x^{-7})' = -7x^{-8} \quad \text{Case } (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{x^3}\right)' = \left(\frac{x^{1/2}}{x^3}\right)' = \left(x^{1/2-3}\right)' = \left(x^{-5/2}\right)' = -\frac{5}{2}x^{-5/2-1} = -\frac{5}{2}x^{-7/2}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{\sqrt{x}}{x^3} = \sqrt{x} \cdot x^{-3} \quad \left(\frac{1}{2x+3}\right)' = (2x+3)^{-1}' = -(2x+3)^{-2} \cdot 2$$

$$\left(\frac{1}{2x+3}\right)' = (2x+3)^{-5}' = -5(2x+3)^{-6} \cdot 2$$

$$\left(\sin(2x+3)\right)' = \cos(2x+3) \cdot 2 \quad \left(\sin(x^5)\right)' = \cos(x^5) \cdot 5x^4$$

$$\left(\sin^5 x\right)' = 5\sin^4 x \cdot \cos x$$

$$(f \circ g)' = f' \circ g \cdot g' \quad \text{ou} \quad (f[g])' = f'[g] \cdot g'$$

avec ici

$$\sin x = g(x), \quad \text{et} \quad x^5 = f(x)$$

$$f(g(x)) = \sin^5 x$$

$$\begin{aligned} f(g(x))' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= 5(g)^4 \cdot \cos x \end{aligned}$$

$$(\ln(2x+3))' = \frac{1}{2x+3} \cdot 2$$

$$(\ln(x^5))' = (5 \ln(x))' = 5 \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{x}$$

$$(\ln(x^5))' = \frac{1}{x^5} \cdot 5x^4 = \frac{5}{x}$$

$$(\ln^5(x))' = 5 \ln^4(x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$\arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\arctan(2x+3) = \frac{1}{1+(2x+3)^2} \cdot 2$$

$$\arctan(x^5) = \frac{1}{1+(x^5)^2} \cdot 5x^4$$

$$= \frac{5x^4}{1+x^{10}}$$

$$\arctan^5(x) = 5 \arctan^4(x) \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

$$\left(\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2+\cos^2 x} dx \right)' = 0$$

cot

$$[F(x)]_0^2 = (F(2) - F(0))' = 0$$

$$\int_0^2 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \left(\frac{4}{2} \right) - 0 = (2)' = 0$$

$$(f(0))' = 0 \neq f'(0)$$

LIMITES

I Opérations sur les limites. H1 Calcul Direct

$$\lim (f+g) = \lim f + \lim g \quad \lim (f/g) = (\lim f) / (\lim g)$$

$$\lim \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{\lim f}{\lim g}$$

Problèmes de Formes indéterminées.

les F. I sont

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$+\infty - \infty$$

$$0 \cdot \infty$$

$$1^{\infty}$$

$$\left(\frac{0}{0} = 0 \quad ; \quad \frac{\infty}{0} = \infty \quad ; \quad \infty \cdot \infty = \infty \right) \leftarrow \text{ce ne sont pas des F. I}$$

[12] Mettre le plus grand en facteur

ex $\lim_0 \frac{2x+3x^2}{-x+x^2} = \left(\frac{0}{0} \text{ F.I.} \right) ?$

$\lim_{\infty} \frac{2x+3x^2}{-x+x^2} = \left(\frac{\infty}{-\infty} \text{ F.I.} \right) ?$

(
! en $+\infty$: $x^2 \gg x$
en 0 : $x \gg x^2$)

$$\frac{2x+3x^2}{-x+x^2} = \frac{\cancel{x^2} \left[\frac{2}{x} + 3 \right]}{\cancel{x^2} \left[-\frac{1}{x} + 1 \right]} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{0+3}{0+1} = 3$$

$$\frac{2x+3x^2}{-x+x^2} = \frac{\cancel{x} (2+3x)}{\cancel{x} (-1+x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{2+0}{-1+0} = -2$$

[13] Règle de l'Hôpital (Hors Programme) $\lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f'}{g'}$
quand il ya une F.I. $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$

14) On utilise la valeur absolue pour montrer qu'une limite vaut 0

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$$

exemple : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = ?$ J'ai l'impression que ça vaut 0.
On prend la valeur absolue

$$\left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n} \xrightarrow{+\infty} 0$$

15) Théorème des gendarmes

$$\text{I} \quad \text{Si} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \\ \lim f(x) = a \\ \lim h(x) = a \end{array} \right. \quad \text{alors} \quad \lim g(x) = a$$

$$\text{II} \quad \text{Si} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) \leq g(x), \forall x \\ \lim f(x) = +\infty \end{array} \right. \quad \text{alors} \quad \lim g(x) = +\infty$$

Exemple 1: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = ? = \frac{\text{pas de limite}}{+\infty} = ? ?$

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \Rightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ donc } \underline{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0} \text{ (T des gendarmes)}$$

Exemple 2: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x + x = ? = \text{pas de limite } +\infty \quad ??$

$$-2 + x \leq \sin x + x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -2 + x = +\infty, \text{ donc } \underline{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x + x = +\infty} \text{ (T des gendarmes)}$$

II les développements limités

21. définitions

Un développement limité de f à l'ordre n en x_0 (noté $DL_n(f)(x_0)$).

est une expression de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \mathcal{O}(x-x_0)^n$$

où $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des constantes réelles

$$\text{où } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\mathcal{O}(x-x_0)^n}{(x-x_0)^n} = 0$$

J'appelle ça la
partielle

La première terme non nul s'appelle la partie principale de la DL

(c'est souvent a_0). Quand $a_0 = 0$, c'est souvent $a_1(x-x_0)$

quand $a_0 = a_1 = 0$, c'est souvent $a_2(x-x_0)^2$

122] DLs usuels au voisinage de 0.

$$\text{Rappel : } 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad \text{qd } x \neq 1$$
$$= \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = \underset{\substack{\uparrow \\ a_0=1}}{1} + \underset{\substack{\uparrow \\ a_1=1}}{x} + x^2 + \dots + \underset{\substack{\uparrow \\ a_n=1}}{x^n} + \left(\frac{x^{n+1}}{1-x} \right) \text{ Bubble}$$

DL en 0 à l'ordre n de $\frac{1}{1-x}$: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$ ①

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$$
 ②

on a remplacé x par $-x$

On intègre (1) : $-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{partielle}$
← ordre n+1

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \dots - \frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1}) \quad \leftarrow \text{ordre } n$$

On intègre (2) : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{partielle}$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1})$$

ou
 $\mathcal{O}(x^{2n+1})$

DL₀ à l'ordre 2 de $\cos x$: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^2)$

ordre 4: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \mathcal{O}(x^4)$

ordre 3: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^3)$

($= 1 + 0x - \frac{x^2}{2!} + 0x^3 + \mathcal{O}(x^3)$)

ordre 1: $\cos x = 1 + \mathcal{O}(x)$

ordre 0: $\cos x = 1 + \mathcal{O}(1)$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1})$$

ou
 $\mathcal{O}(x^{2n+2})$

rappel: $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathcal{O}(x^{2n})$$

ou
 $\mathcal{O}(x^{2n+1})$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1})$$

ou
 $\mathcal{O}(x^{2n+2})$

