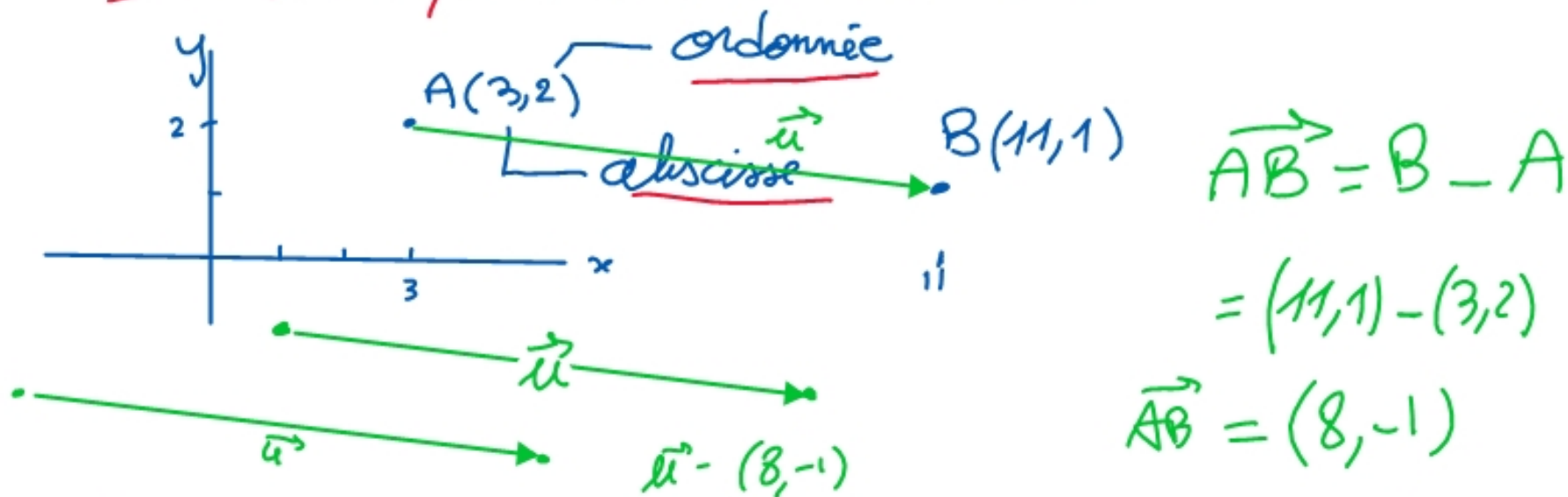


Géométrie analytique !

I Points, vecteurs et droites de \mathbb{R}^2



$$\vec{AB} = B - A$$

$$= (11, 1) - (3, 2)$$

$$\vec{AB} = (8, -1)$$

distance entre 2 points A et B = norme des vecteurs \vec{AB}

$$d(A, B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

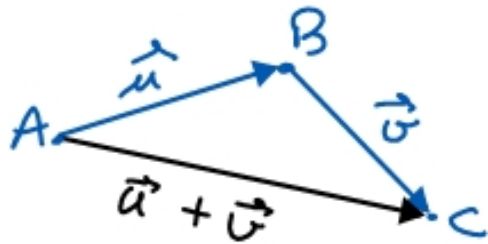
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_{\vec{u}}^2 + y_{\vec{u}}^2}$$

pente d'un vecteur:

$$p = \frac{y_{\vec{u}}}{x_{\vec{u}}}$$

$$p = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Somme de deux vecteurs



$$\vec{u}(3,1)$$

$$\vec{v}(2,-2)$$

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$

Relation de Chasles

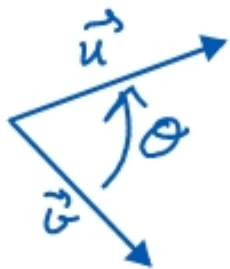
produit scalaire

$$\vec{u}(x_u, y_u)$$

$$\vec{v}(x_v, y_v)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$$

$$\text{avec } \vec{u} = (3,1) \text{ et } \vec{v} = (2,-2) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) = 6 - 2 = 4$$



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\theta)$$

$$4 = \sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2} \cos(\theta) = \sqrt{10} \sqrt{8} \cos(\theta) \\ = \sqrt{80} \cos(\theta) = 4\sqrt{5} \cos(\theta)$$

$$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{4}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

vecteurs orthogonaux

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\text{car } \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

ex : un vecteur \perp à $\vec{u} = (3, 1)$ est $\vec{v}_1 = (-1, 3)$

$$\text{(car } 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = 0)$$

ou $\vec{v}_2 = (1, -3)$ ou $\vec{v}_3 = (2, -6)$

Un vecteur \perp à $\vec{a} = (a, b)$ est $\vec{v} = (-b, a)$ ou $(b, -a)$

$$\text{car } (a, b) \cdot (-b, a) = -ab + ba = 0$$

vecteur normé ou unitaire : On dit que \vec{u} est unitaire (ou normé)

$$\text{lorsque } \|\vec{u}\| = 1$$

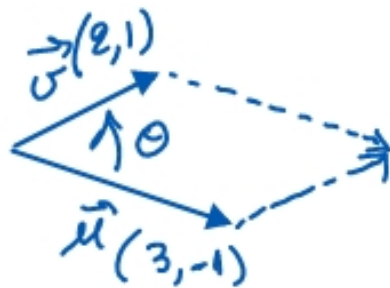
Pour normer un vecteur \vec{u} , on le divise par sa norme.

ex : si $\vec{u} = (3, 1)$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{10}$ et si $\vec{a} = \frac{\vec{u}}{\sqrt{10}}$, alors $\|\vec{a}\| = 1$

déterminant : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \det \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} & x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} & y_{\vec{v}} \end{pmatrix} = x_{\vec{u}} \cdot y_{\vec{v}} - x_{\vec{v}} \cdot y_{\vec{u}}$

note $\begin{vmatrix} x_{\vec{u}} & x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} & y_{\vec{v}} \end{vmatrix}$

ex : $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$



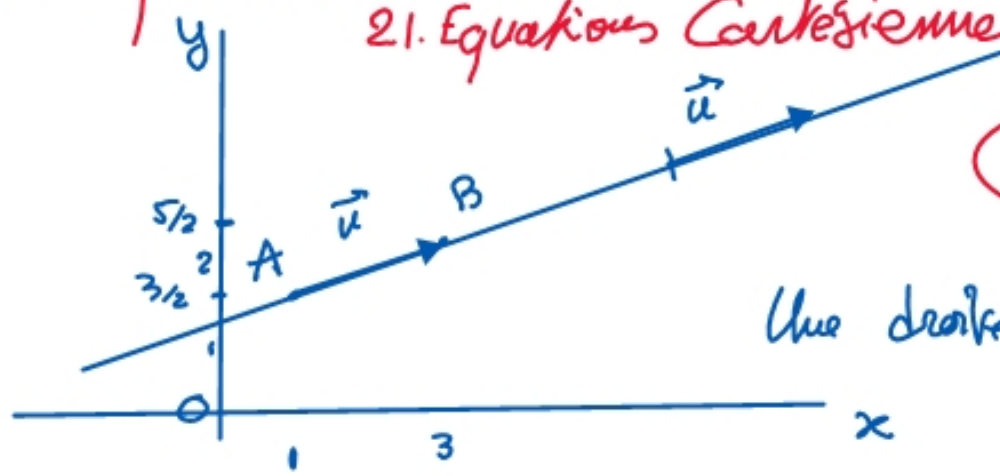
$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-1 \cdot 2) = 5$$

$$\begin{aligned} |\det(\vec{u}, \vec{v})| &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin \theta| \\ &= \text{aire des parallélogramme} \\ &\quad \text{fermé par } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \end{aligned}$$

\vec{u} et \vec{v} sont colinéaires ($\vec{u} = k \cdot \vec{v}$) lorsque $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

II Equations de droite

21. Equations Cartésiennes



la pente de la droite est a

$y = ax + b$

Une droite verticale a pour eq $x = c$ (pente infinie)

On peut aussi écrire l'eq d'une droite. $ax + by = c$

avec $A = (1, \frac{3}{2})$ et $B = (3, \frac{5}{2})$

$\vec{AB} = (3, \frac{5}{2}) - (1, \frac{3}{2}) = (2, 1)$

pente de \vec{AB} : $\frac{1}{2} = p$

\Downarrow

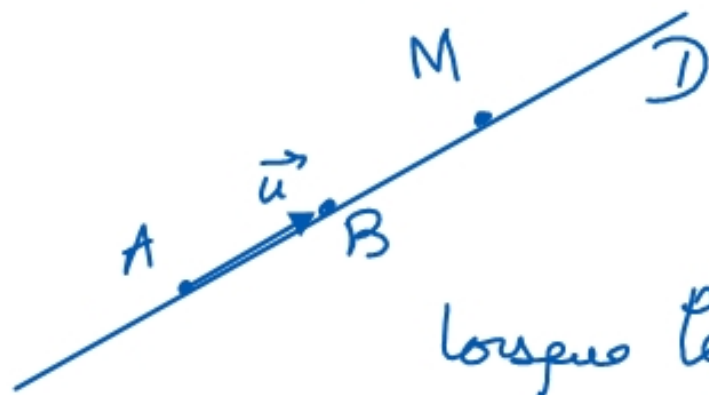
$y = -\frac{ax + c}{b}$

pente $-\frac{a}{b}$

droite (AB) $y = \frac{1}{2}x + b$. On passe par $A(1, \frac{3}{2})$, donc $\frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1 + b$

$\Rightarrow b = 1$ $(AB) y = \frac{1}{2}x + 1$ \Rightarrow $2y = x + 2$ $-x + 2y = 2$

2.2 Equations paramétriques



$$\begin{cases} x = x_A + t \vec{u} \\ y = y_A + t \vec{u} \end{cases} \text{ où } t \text{ décrit } \mathbb{R}$$

Lorsque le paramètre décrit \mathbb{R} , on obtient tous les points de D .

ex : si $t = 0$ $\begin{cases} x = x_A \\ y = y_A \end{cases}$, on obtient le point A

si $t = 1$ $\begin{cases} x = x_A + \vec{u} \\ y = y_A + \vec{u} \end{cases}$, on obtient le point B

Avec $A = (1, \frac{3}{2})$ et $\vec{u} = (2, 1)$

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + \frac{3}{2} \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

$x = 2y - 2$
 \nearrow OK

On obtient l'équation cartésienne en éliminant t : $t = y - \frac{3}{2} \Rightarrow x = 2y - 3 + 1$

2.3 Droite vectorielle associée

exemple : $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + \frac{3}{2} \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

(Un vect directeur est $\vec{v} = (2, 1)$
Un point de \mathcal{D} est $A = (1, \frac{3}{2})$)

Si on choisit t , on obtient un point $M(t)$ de \mathcal{D} .

La droite vectorielle associée (celle qui contient les vecteurs directeurs de \mathcal{D}) a pour équation paramétrique $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

$\vec{u} = (2, 1)$ pour $t=1$

$\vec{v} = (4, 2)$ pour $t=2$

notation $\vec{\mathcal{D}}$ est la droite vectorielle associée à \mathcal{D}

(on dit que \mathcal{D} est une droite affine)

droite affine = droite de points

droite vectorielle = droite de vecteurs

en cartésien $\mathcal{D} : y = \frac{1}{2}x + 1$ ou bien $-x + 2y = 2$
↑
pente

droite vectorielle associée : $\vec{\mathcal{D}} : y = \frac{1}{2}x$ ou bien $-x + 2y = 0$

vérifions que $\vec{u}(2, 1) \in \vec{\mathcal{D}}$: $y_{\vec{u}} = 1 = \frac{1}{2} \cdot x_{\vec{u}}$ Ok!

Cas général : $\mathcal{D} \begin{cases} x = at + b \\ y = a't + b' \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$
↑
un vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}$ ← un point de $\mathcal{D} : A \begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}$

$\vec{\mathcal{D}} : \begin{cases} x = at \\ y = a't \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

$\mathcal{D} : \alpha x + \beta y = \gamma$

$\vec{\mathcal{D}} : \alpha x + \beta y = 0$