

② $A(x) = \frac{4x^2 - 5x}{16x^2 - 25}$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$A(x) = \frac{x(4x-5)}{(4x)^2 - 5^2} = \frac{x(4x-5)}{(4x+5)(4x-5)} = \frac{x}{4x+5}$$

$$B(x) = \frac{(x+2)^2 - 16}{7x^2 + 3x} = \frac{(x+2+4)(x+2-4)}{x(7x+3)} = \frac{(x+6)(x-2)}{x(7x+3)}$$

$$C(x) = \frac{(x+3)^2}{(3x-2)x + (x+1)(6x-4)} = \frac{(x+3)^2}{(3x-2)x + 2(x+1)(3x-2)}$$

$$= \frac{(x+3)^2}{(3x-2)[x + 2(x+1)]} = \frac{(x+3)^2}{(3x-2)(3x+2)}$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \times ab}{\frac{1}{ab} \times ab} = \frac{b+a}{1} = b+a$$

$$\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \times ab = \frac{ab}{b+a} \quad \frac{a-b}{a+b} + 1 = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a+b} = \frac{2a}{a+b}$$

$$\begin{matrix} bx \\ bx \end{matrix} \frac{a}{b^3 c^2} + \frac{a}{b^4 c} \times c = \frac{ab}{b^4 c^2} + \frac{ac}{b^4 c^2} = \frac{ab+ac}{b^4 c^2} = \frac{a(b+c)}{b^4 c^2}$$

$$\frac{4x-5}{2-x} - \frac{3x-1}{x-2} = \frac{4x-5}{2-x} + \frac{3x-1}{2-x} \quad \text{car } -(x-2) = 2-x$$

$$= \frac{7x-6}{2-x}$$

$$(3) \quad A(x) = \frac{7x+2}{x^2-1} \quad A(\sqrt{2}) = \frac{7\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}^2-1} = \frac{7\sqrt{2}+2}{2-1} = 7\sqrt{2}+2$$

$$A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7 \cdot \frac{1}{2} + 2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1} = \frac{7 \cdot 0.5 + 2}{1 - 4} = \frac{5.5}{-3} = -\frac{11}{6}$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab? \quad a^2 + b^2 - 2ab \geq 0?$$

$$(a-b)^2 \geq 0 \quad \forall a, b$$

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Rightarrow \underline{a^2 + b^2 \geq 2ab}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{a^2 b^2 + 1} \geq 1 + ab$$

$$(a^2 + b^2 + x^2) \geq x + 2ab + \frac{x^2}{b}$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 + a^2b^2 + 1 \geq 1 + 2ab + a^2b^2 = (1 + ab)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + a^2b^2 + 1} \geq 1 + ab$$

$$\sqrt{1 + a^2} + \sqrt{1 + b^2} \geq 2 \sqrt{1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$$

$$1 + a^2 + 2\sqrt{1 + a^2}\sqrt{1 + b^2} + 1 + b^2 \geq 4 \left(1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)$$

$$2\sqrt{1 + a^2 + b^2 + a^2b^2} \geq \underbrace{-1 - a^2 - 1 - b^2 + 4 + (a+b)^2}_{2 - a^2 - b^2 + a^2 + b^2 + 2ab}$$

OK

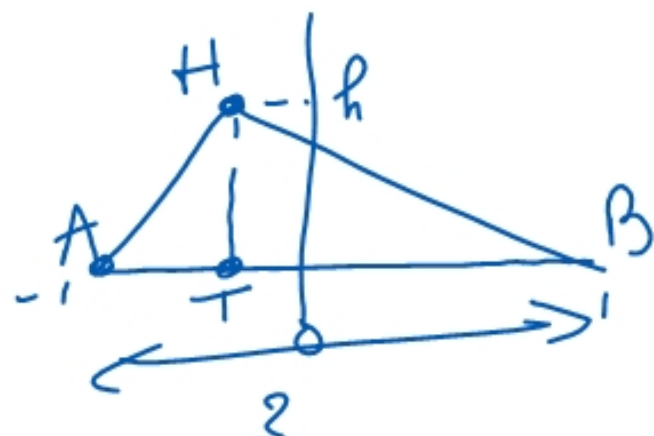
$$\sqrt{a^2 + b^2 + a^2b^2 + 1} \geq 1 + ab \Rightarrow 2\sqrt{\quad} \geq 2 + 2ab = \dots$$

$$\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+b^2} \geq 2\sqrt{1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \Leftrightarrow 1+a^2+2\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}+1+b^2 \geq 4\left(1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)$$

(car $A \geq B \Leftrightarrow A^2 \geq B^2$ qd A, B sont ≥ 0)

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \sqrt{\dots} \geq \dots$$

II



$$\text{Aire} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$$

$$\text{Aire} = \frac{2 \times h}{2} = h$$

$$\Rightarrow h = 1$$

$$T = (t, 0) \quad H = (t, h)$$

$$HB = \sqrt{(x_B - x_H)^2 + (y_B - y_H)^2} = \sqrt{(1-t)^2 + 1}$$

$$AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2} = \sqrt{(t+1)^2 + 1}$$

III

$$P(-1)=0$$

$$P(1)=0$$

$$\int_{-1}^1 P(x) dx = 1$$

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

$$a - b + c = 0$$

$$a + b + c = 0$$

$$\int_{-1}^1 (ax^2 + bx + c) dx =$$

$$\left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right]_{-1}^1 = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} a - b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} l_1 - l_2: 2b = 0 \\ b = 0 \end{array}$$

$$\frac{2a}{3} + 2c = 1$$

$$\frac{2a}{3} + 2c = 1$$

$$a + c = 0$$

$$c = -a$$

$$\frac{2a}{3} - 2a = 1 \dots a = -\frac{3}{4}$$

$$c = \frac{3}{4}$$

$$P(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}$$

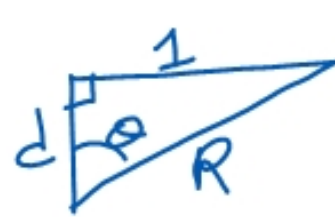
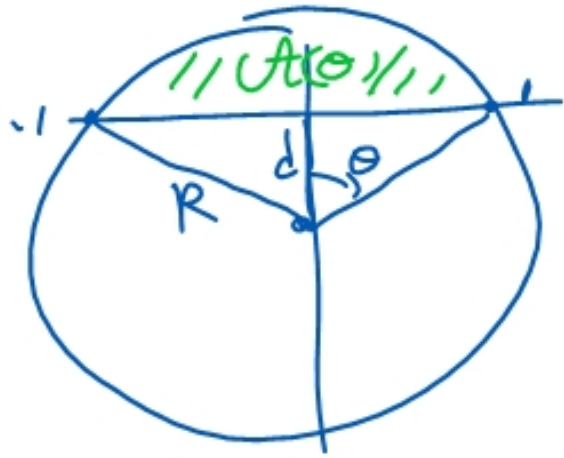
$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2$$

$$= \frac{\cancel{e^{2x}} + 2e^x e^{-x} + \cancel{e^{-2x}}}{4} - \frac{\cancel{e^{2x}} - 2e^x e^{-x} + \cancel{e^{-2x}}}{4}$$

$$= \frac{4}{4} = 1$$

$$\operatorname{ch}' x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{2\operatorname{ch}(2x) + 2}{4} = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}$$



$$\sin \theta = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{hyp}} = \frac{1}{R}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{Côté adjoint}}{\text{hyp}} = \frac{d}{R}$$

$$\rightarrow R = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$d = R \cos \theta$$

$$d = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$A(\theta) = \frac{\theta}{(\sin^2 \theta)} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} ?$$

aire du cercle = πR^2

moins

aire du triangle

aire d'un disque: πR^2

$$A_1 = \pi R^2$$

$$A_2 = \frac{\theta \cdot d}{2}$$

$$\text{ex: } x^2 y'' + 3xy' - 3y = 5x^2$$

Vérifier que les fonctions $f(x) = Ax$ où $A \in \mathbb{R}$ sont solutions de

$$\text{HOM: } x^2 y'' + 3xy' - 3y = 0$$

$$f(x) = A \cdot x \quad f'(x) = A \quad f''(x) = 0$$

$$x^2 f'' + 3x f' - 3f = 0 + 3xA - 3Ax = 0 \quad \text{Yes!}$$

les solutions de HOM sont les $y = Ax + B$?

On pose $y = A(x) \cdot x$ (on fait varier la constante A)

$$y'(x) = A'(x) \cdot x + A(x) \quad y''(x) = A''(x) \cdot x + A'(x) + A'(x) = A''(x) \cdot x + 2A'(x)$$

$$x^2 y'' + 3xy' - 3y = 5x^2 \Leftrightarrow \underline{A''(x) \cdot x^3 + 2A'(x) \cdot x^2 + 3A'(x) \cdot x^2 + 3Ax - 3Ax} = 5x^2$$

$$\Leftrightarrow A''(x) \cdot x^3 + 5A'(x) \cdot x^2 = 5x^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2} (A''(x) \cdot x + 5A'(x)) = \cancel{5x^2}$$

Avec $y = A(x) \cdot x$. L'équa diff initiale devient:

$$x A''(x) + 5 A'(x) = 5$$

On pose $Y = A'$

$$\Leftrightarrow x Y'(x) + 5 Y(x) = 5$$

équa diff d'ordre 1

Hom: $x Y' + 5 Y = 0 \Rightarrow Y_H = C e^{-\int \frac{5}{x} dx} = C e^{-5 \ln x} = C e^{\ln(x^{-5})} = C x^{-5}$

$$Y_H = C x^{-5} \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

Sol part. ultérie: $Y_k = 1$ convient! car $Y' = 0$ et $x \cdot 0 + 5 \cdot 1 = 5$

Sols de l'éq complète: $Y = C x^{-5} + 1$ où $C \in \mathbb{R}$

$$Y = A' \Rightarrow A(x) = \int (C x^{-5} + 1) dx = C \int x^{-5} dx + \int 1 dx = C \frac{x^{-4}}{-4} + x + C_0 k$$

$$A(x) = C_0 k_1 x^{-4} + x + C_0 k_2$$

Comme $y = A(x) \cdot x$

$$y = C_0 k_1 x^{-3} + x^2 + C_0 k_2 x$$

$$y = Ax + Bx^{-3} + x^2$$

où A et $B \in \mathbb{R}$

III Quelques généralités.

On appelle F l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

Def: On dit qu'un sous-ensemble de F (appelé E) est stable pour +

lorsque " Si f et $g \in E$, alors $f+g \in E$ "

On dit qu'un sous-ensemble de F (appelé E) est stable pour \cdot

lorsque " Si $f \in E$ et $a \in \mathbb{R}$, alors $af \in E$ "

On dit qu'un sous-ensemble E de F est un espace vectoriel de F

lorsque " (1) E contient la fonction nulle
(2) E est stable pour +
(3) E est stable pour \cdot "

abréviation: } S. E. V

IT] L'ensemble des solutions de H07: $ax'' + bx'y' + cxy = 0$ est un sev de F

[On appelle E l'ensemble des solutions de $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ (HOM)

(1) la fonction nulle est dans E car $a(x) \cdot 0 + b(x) \cdot 0 + c(x) \cdot 0 = 0$

(2) stabilité pour + : Je prends deux fonctions f et $g \in E$

(donc f et g sont sols de HOM). On doit montrer que $f+g \in E$, c'est à dire que $f+g$ est sol de HOM

$$a(x)(f+g)'' + b(x)(f+g)' + c(x)(f+g) = a(x)(f''+g'') + b(x)(f'+g') + c(x)(f+g)$$

$$= \underbrace{a(x)f'' + b(x)f' + c(x)f} + \underbrace{a(x)g'' + b(x)g' + c(x)g}$$

$$= 0 + 0 \quad \text{car } f \text{ et } g \in E$$

$$= 0 \quad \text{Donc } f+g \text{ est sol de HOM. } f+g \in E. \text{ Donc } \underline{\text{E est stable pour +}}$$

(3) Stabilité pour \cdot : Je prends une fonction $f \in E$ et un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$

$$a(x)(\alpha f)'' + b(x)(\alpha f)' + c(x)(\alpha f) = a(x)\alpha f'' + b(x)\alpha f' + c(x)\alpha f = \alpha [a(x)f'' + b(x)f' + c(x)f]$$

$$= \alpha \cdot 0 \quad \text{car } f \text{ est sol de HOM}$$

$$= 0. \quad \text{Donc } \underline{\alpha f \in E}. \quad \underline{\text{E est stable pour } \cdot} \quad]$$

