

ex 2: $y'' - 2y' = x + 1$

HOP: $y'' - 2y' = 0$ $P(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$

2 racines réelles 0 et 2. Donc $y_H = Ae^{0x} + Be^{2x}$

$y_H = A + Be^{2x}$ où $A, B \in \mathbb{R}$

Sol particulière: $y_p = ax + b$ $y_p' = a$ $y_p'' = 0$

$y_p'' - 2y_p' = 0 - 2a = x + 1$ Ça ne marche pas.

On cherche une sol part de la forme $y_p = ax^2 + bx$

$y_p' = 2ax + b$ $y_p'' = 2a$ $y_p'' - 2y_p' = 2a - 4ax - 2b = x + 1$

$\begin{cases} -4a = 1 \\ 2a - 2b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{4} \Rightarrow 2b = 2a - 1 = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2} \Rightarrow b = -\frac{3}{4}$

$y_p = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x$

Sols de l'eq complète: $y = A + Be^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x$ où $A, B \in \mathbb{R}$

$$\text{ex 3 } y'' - 2y' = (x+1)e^{3x}$$

Hom: $\mathcal{L}(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$

$$y_H = A + Be^{2x} \text{ où } A, B \in \mathbb{R}$$

Sol part: $y_p = (ax+b)e^{3x}$ $y'_p = a e^{3x} + (ax+b)3e^{3x} = (3ax+a+3b)e^{3x}$

$$y''_p = 3a e^{3x} + (3ax+a+3b)3e^{3x} = (9ax+6a+9b)e^{3x}$$

$$y''_p - 2y'_p = (9ax+6a+9b - 6ax - 2a - 6b)e^{3x} = (x+1)e^{3x}$$
$$= (3ax+4a+3b)e^{3x}$$

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ 4a+3b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{3} \Rightarrow 3b = 1 - 4a = 1 - \frac{4}{3} = \frac{3}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$$
$$b = -\frac{1}{9}$$

$$y_p = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right)e^{3x}$$

Sols de l'eq complète:

$$y = A + Be^{2x} + \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right)e^{3x} \text{ où } A, B \in \mathbb{R}$$

$$(4) \quad y'' - 2y' = (x+1)e^{2x}$$

$$\text{Holt: } y_H = A + B e^{2x} \text{ si } A, B \in \mathbb{R}$$

$$\text{Sol part: } y_p = (ax+b)e^{2x}$$

$$y_p' = a e^{2x} + 2(ax+b)e^{2x} = (2ax + a + 2b)e^{2x}$$

$$y_p'' = 2a e^{2x} + 2(2ax + a + 2b)e^{2x} = (4ax + 4a + 4b)e^{2x}$$

$$y_p'' - 2y_p' = (\cancel{4ax} + 4a + \cancel{4b} - \cancel{4ax} - 2a - \cancel{4b})e^{2x} = 2a e^{2x} = (x+1)e^{2x}$$

$$\Rightarrow \underbrace{2a}_{\text{cot}} = \underbrace{x+1}_{\text{varie}}$$

So no marche pas

$$\text{On recommence avec } y_p = (ax^2 + bx)e^{2x}$$

Sol particolare: $y_p = (ax^2 + bx)e^{2x}$

$$y_p' = (2ax + b)e^{2x} + (ax^2 + bx)2e^{2x} = (2ax^2 + (2a + 2b)x + b)e^{2x}$$

$$y_p'' = (4ax + 2a + 2b)e^{2x} + (2ax^2 + (2a + 2b)x + b)2e^{2x} \cdot 2$$
$$= (4ax^2 + (8a + 4b)x + 2a + 4b)e^{2x}$$

$$y_p'' - 2y_p' = (4ax^2 + (8a + 4b)x + 2a + 4b - 4ax^2 - (4a + 4b)x - 2b)e^{2x}$$
$$= (4ax + 2a + 2b)e^{2x} = (x + 1)e^{2x}$$

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ 2a + 2b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow 2b = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{4}$$

$$y_p = \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right)e^{2x}$$

Sol. completo: $y = A + Be^{2x} + \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right)e^{2x}$ con $A, B \in \mathbb{R}$

$$\textcircled{5} \quad y'' - 4y' + 4y = x + 1$$

HOM: $P(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ Une racine double 2

($\Delta = 16 - 16 = 0$ Une racine double $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4}{2} = 2$)

$$y_H = (Ax + B)e^{2x} \text{ où } A, B \in \mathbb{R}$$

Sol part: $y_p = ax + b$ $y'_p = a$ $y''_p = 0$

$$y''_p - 4y'_p + 4y_p = 0 - 4a + 4ax + 4b = x + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a = 1 \\ 4b - 4a = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow 4b = 1 + 4a = 2 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$y_p = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

Sols de l'eq complète: $y = (Ax + B)e^{2x} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ où $A, B \in \mathbb{R}$

$$\textcircled{6} \quad y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x} \quad \text{Hom: } y_H = (Ax+B)e^{2x} \text{ mit } A, B \in \mathbb{R}$$

$$\text{Sol part: } y_p = (ax+1) \cdot e^{2x} \cdot x^2 = (ax^3 + bx^2)e^{2x}$$

$$y_p' = (3ax^2 + 2bx)e^{2x} + 2(ax^3 + bx^2)e^{2x} = (2ax^3 + (3a+2b)x^2 + 2bx)e^{2x}$$

$$y_p'' = (6ax^2 + (6a+4b)x + 2b)e^{2x} + (2ax^3 + (3a+2b)x^2 + 2bx) \cdot 2 \cdot e^{2x}$$

$$y_p'' = (4ax^3 + (12a+4b)x^2 + (6a+8b)x + 2b)e^{2x}$$

$$y_p'' - 4y_p' + 4y_p = \left(\begin{array}{l} 4ax^3 + (12a+4b)x^2 + (6a+8b)x + 2b \\ + (-8ax^3 - (12a+8b)x^2 - 8bx) \\ + (4ax^3 + 4bx^2) \end{array} \right) e^{2x}$$

$$= (6ax + 2b)e^{2x} = (x+1)e^{2x} \Rightarrow \begin{cases} 6a=1 & a=\frac{1}{6} \\ 2b=1 & b=\frac{1}{2} \end{cases} \quad y_p = \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right) e^{2x}$$

$$\text{Sol des l'eq complete: } y = (Ax+B)e^{2x} + \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right) e^{2x} \text{ mit } A, B \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{7} \quad y'' + y' + y = 13 \cos(2x)$$

$$P(X) = X^2 + X + 1 \quad \Delta = 1 - 4 = -3 = (\sqrt{3}i)^2$$

deux racines : $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\text{amortissement}} \pm i \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\text{pulsation}}$

$$y_H = e^{-\frac{1}{2}x} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right)$$

Sol particulière : $y_p = a \cos(2x) + b \sin(2x)$

$$y_p' = -2a \sin(2x) + 2b \cos(2x)$$

$$y_p'' = -4a \cos(2x) - 4b \sin(2x)$$

$$y_p'' + y_p' + y_p = (2b - 3a) \cos(2x) + (-2a - 3b) \sin(2x) = 13 \cos(2x)$$

$$\begin{cases} 2b - 3a = 13 \\ -2a - 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \times 3 \\ \times 2 \end{matrix} \begin{cases} 6b - 9a = 39 \\ -4a - 6b = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 + L_2 : -13a = 39 \\ \Rightarrow a = -3 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow 2b = 13 + 3a = 13 - 9 = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$y_p = -3 \cos(2x) + 2 \sin(2x)$$

sols de l'eq complète : $y = y_H + y_p$

II Lorsque les coefficients a, b, c ne sont pas constants
ou lorsque le second membre n'est pas simple

que : les sols de l'OTI sont $y_H = A \cdot f(x) + B e^{rx}$ ou $A e^{rx} + B e^{rx}$

On cherche une solution particulière de la forme $y_P = A(x) f(x)$
ou

$$y_P = B(x) g(x)$$

(le plus simple des deux)

(On remplace la constante A ou B par une fonction $A(x)$ ou $B(x)$)

On est conduit à une équation diff de la forme $\alpha(x) A'(x) + \beta(x) A(x) = \gamma(x)$

En posant $Z = A'$, on obtient : $\alpha(x) Z'(x) + \beta(x) Z(x) = \gamma(x)$ ORDRE 1