

### 43 Solutions de l'équation complète $ay' + by = ax$ ,

• On résout l'éq homogène  $y_H = Ae^{-\frac{b}{a}x}$  où  $A \in \mathbb{R}$

• On trouve une sol particulière  $y_P$

• On additionne les deux

$$y = y_H + y_P$$

**Méthode de superposition:** On veut résoudre  $ay' + by = x^2 - 1 + 2\cos(3x)$

• Hom.:  $y_H = Ae^{-\frac{b}{a}x}$

• Une sol particulière pour  $x^2 - 1$   $y_1$  ( $ax^2 + bx + c$ )

• Une sol particulière pour  $2\cos(3x)$   $y_2$  ( $a\cos(3x) + b\sin(3x)$ )

• Sols de l'éq complète:  $y = y_H + y_1 + y_2$

exemple:  $y' - 2y = x^2 - 1 + 2\cos(3x)$

Hom:  $y' - 2y = 0$

$$y_H = A e^{2x} \text{ où } A \in \mathbb{R}$$

Sol particulière pour  $x^2 - 1$ :  $y_1 = ax^2 + bx + c$      $y_1' = 2ax + b$

$$y_1' - 2y_1 = 2ax + b - 2ax^2 - 2bx - 2c = -2ax^2 + (2a - 2b)x + b - 2c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a = 1 \\ 2a - 2b = 0 \\ b - 2c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ 2c = +1 + b = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$y_1 = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

Sol particulière pour  $2\cos(3x)$ :  $y_2 = a\cos(3x) + b\sin(3x)$

$$y_2' = -3a\sin(3x) + 3b\cos(3x)$$

$$y_2' - 2y_2 = -3a\sin(3x) + 3b\cos(3x) - 2a\cos(3x) - 2b\sin(3x) = (3b - 2a)\cos(3x) + (-3a - 2b)\sin(3x)$$

$$\begin{cases} 3b - 2a = 2 \\ -3a - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \times 3 \\ \times 2 \end{matrix} \begin{cases} 9b - 6a = 6 \\ -6a - 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{avec } L_1: 2a = 3b - 2 = \frac{18 - 2b}{3} = \frac{-8}{3}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{4}{3}$$

$$y_2 = -\frac{4}{3}\cos(3x) + \frac{6}{13}\sin(3x)$$

Solution générale complète :  $y = Ae^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{4}{13}\cos(3x) + \frac{6}{13}\sin(3x)$   
où  $A \in \mathbb{R}$

On trouve  $A$  si on donne une condition initiale

V Équation diff. linéaire d'ordre 1. Cas général

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$$

coefficients non constants

ou second membre possible

(51) Équation Homogène :  $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$

IT les solutions de  $a(x)y' + b(x)y = 0$  sont les  $y = Ae^{-\int \frac{b}{a}}$  où  $A \in \mathbb{R}$

exemple:  $x^{3/2}y' - y = 0$

$$y_H = A e^{-\int \frac{-1}{x^{3/2}} dx} = A e^{\int \frac{1}{x^{3/2}} dx} = A e^{\int x^{-3/2} dx}$$

$$\text{or } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad y_H = A e^{\frac{x^{-3/2+1}}{-3/2+1}}$$

$$y_H = A e^{\frac{x^{-1/2}}{-1/2}} = A e^{-2x^{-1/2}} = A e^{-\frac{2}{\sqrt{x}}}$$

$$y_H = A e^{-\frac{2}{\sqrt{x}}}$$

ou  $A \in \mathbb{R}$

§2) Solution particulière avec la  
Méthode de Variation de la Constante (M.V.C.)

On a trouvé  $y_H = A f(x)$  ou  $A \in \mathbb{R}$

Pour trouver la sol particulière, on remplace la constante  $A$  par  
la fonction  $A(x)$

$$y_P = A(x)f(x)$$

ex 1 :  $xy' + y = \ln(x)$  On cherche les solutions  $y(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}^{+*}$

H011 :  $xy' + y = 0$   $y_H = A e^{-\int \frac{1}{x} dx} = A e^{-\ln x} = A e^{\ln(x^{-1})} = A x^{-1}$

$$y_H = \frac{A}{x} \text{ où } A \in \mathbb{R}$$

A est devenu  
 $A(x)$

Sol particulière : MVC  $y_P = \frac{A(x)}{x}$

$$y_P' = \frac{A'(x)x - A(x)}{x^2} \quad xy_P' + y_P = \frac{A'(x)x - A(x)}{x} + \frac{A(x)}{x} = A'(x)$$

les  $A(x)$  ont disparu. (c'est toujours le cas !)

On est conduit à  $A'(x) = \ln x \Rightarrow A(x) = \int \ln x dx = x \ln x - x$

$$\Rightarrow y_P = \frac{A(x)}{x} = \frac{x \ln x - x}{x} = \frac{x(\ln x - 1)}{x} = \ln(x) - 1 \quad y_P = \ln|x| - 1$$

Sols de l'éq complète :  $y = \frac{A}{x} + \ln|x| - 1$  où  $A \in \mathbb{R}$

$$\text{ex2: } y' - 3y = (x^2 - 2x + 5)e^{3x}$$

Résoudre cette équ. diff avec la M.V.C.

$$\text{Hom: } y' - 3y = 0$$

$$y_H = A e^{3x} \text{ où } A \in \mathbb{R}$$

Sol particulière: MVC

$$y_p = A(x)e^{3x}$$

$$y_p' = A'(x)e^{3x} + 3A(x)e^{3x}$$

$$y_p' - 3y_p = A'(x)e^{3x} + 3A(x)e^{3x} - 3A(x)e^{3x} = (x^2 - 2x + 5)e^{3x}$$

$$\Rightarrow A'(x) = x^2 - 2x + 5 \Rightarrow A(x) = \int (x^2 - 2x + 5) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x$$

$$\Rightarrow y_p = \left( \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x \right) e^{3x}$$

$$\text{Sol de l'éq complète: } y = A e^{3x} + \left( \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x \right) e^{3x} \text{ où } A \in \mathbb{R}$$

La solution que  $y(0) = 37$ :  $y(0) = 37 = A \cdot 1 + 0 \cdot 1 \Rightarrow A = 37$   $y = \left( \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + 37 \right) e^{3x}$

## Equa Diff linéaires d'ordre 2

I lorsque les coefficients sont constants et le second membre simple  
On appelle  $Q(x) = ax^2 + bx + c$  le polynôme caractéristique associé à l'équa diff  $ay'' + by' + cy = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

1<sup>er</sup> cas:  $\Delta > 0$ .  $Q$  a deux racines  $\alpha$  et  $\beta$ . Sol:  $y_H = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$   
où  $A$  et  $B \in \mathbb{R}$

2<sup>es</sup>:  $\Delta = 0$   $Q$  a une racine double  $\alpha$ . Sol:  $y_H = (Ax + B)e^{\alpha x}$   
où  $A$  et  $B \in \mathbb{R}$

3<sup>es</sup>:  $\Delta < 0$  les racines de  $Q$  dans  $\mathbb{C}$  sont  $\lambda \pm i\omega$   
peelisation  
Sol:  $y_H = e^{\lambda x} (A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x))$   
où  $A$  et  $B \in \mathbb{R}$

Pour la solution particulière, on procède comme pour l'ordre 1.

ex 1:  $y''(x) + 2y' + 2y = x + 1$

Hom:  $y'' + 2y' + 2y = 0$  Polynôme caractéristique associé  $P(x) = x^2 + 2x + 2$

$\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$  deux racines  $\frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$  ↑ pulsation 1

Sols  $y_H = e^{-x} (A \cos(x) + B \sin(x))$  où  $A, B \in \mathbb{R}$   
↑  $\omega = 1$

Sol particulière:  $y_P = ax + b$   $y'_P = a$   $y''_P = 0$

$y''_P + 2y'_P + 2y_P = 0 + 2a + 2ax + 2b = 2ax + 2a + 2b = x + 1$

$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + 2b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 0 \end{cases}$

$y_P = \frac{1}{2}x$

Sols de l'éq complète:  $y = e^{-x} (A \cos(x) + B \sin(x)) + \frac{1}{2}x$  où  $A, B \in \mathbb{R}$



