

~~20~~

$$\textcircled{1} \quad 9x^3 - 7x^2 = x^2(9x - 7)$$

$$\textcircled{2} \quad 5(x+1)(x-3) - 4(x+1) = (x+1)[5(x+3) - 4] \\ = (x+1)(5x+11)$$

$$\textcircled{3} \quad 25x^2 - 121 = (5x)^2 - 11^2 = (5x+11)(5x-11)$$

$$\textcircled{4} \quad x^2 - 13 = x^2 - (\sqrt{13})^2 = (x + \sqrt{13})(x - \sqrt{13})$$

$$\textcircled{5} \quad (3x+1)(x-7) - \frac{2x(6x+2)}{2(3x+1)} = (3x+1)[x-7 - 2x \cdot 2]$$

$$\textcircled{6} \quad x^2 + 2x + 1 + (2x+4)(x+1) = (x+1)^2 + (2x+4)(x+1) \\ = (x+1)[(x+1) + (2x+4)] = (x+1)(3x+5)$$

$$(7) (7-2x)(3x+4) + 3(2x+1) \underbrace{(2x-7)}_{-(7-2x)} = A$$

$$A = \underbrace{(7-2x)}_{\text{common factor}}(3x+4) - 3(2x+1)\underbrace{(7-2x)}_{\text{common factor}} = (7-2x)[3x+4-6x-3] \\ = (7-2x)(-3x+1)$$

$$(8) 5(7x^2+x) - (3x+8)(14x+2) = 5x(7x+1) - (3x+8)2(7x+1) \\ = (7x+1)[5x - (3x+8)2] = (7x+1)(-2-16)$$

$$(9) x^2-49 + (3x-4)(-x-7) + 2(2x+14) = (x+7)(x-7) - (3x-4)(x+7) + 4(x+7) \\ = (x+7)[x-7 - (3x-4) + 4] = (x+7)(-2x+1)$$

$$(10) (2x-6)^2 + (x-3) = 4(x-3)^2 + (x-3) = (x-3)[4(x-3)+1] = (x-3)(4x-11)$$

$$(11) \ 9(4x^2 - 4x + 1) + (6x - 3) \mid x - 2x + 1 = A$$

$$9(2x - 1)^2 + 3(2x - 1)x - (2x - 1) = A$$

$$A = (2x - 1) [9(2x - 1) + 3x - 1] = (2x - 1)(21x - 10)$$

$$(12) \ x^3 + x^2 - x - 1 = x^2(x + 1) - (x + 1) = (x + 1)(x^2 - 1)$$

$$= (x + 1)(x + 1)(x - 1)$$

$$= (x + 1)^2(x - 1)$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x^2 - x - 1 & x - 1 \\ - (x^3 - x^2) & \\ \hline 2x^2 - x - 1 & \\ - (2x^2 - 2x) & \\ \hline x - 1 & \\ - (x - 1) & \\ \hline 0 & \end{array} \quad (x + 1)^2$$

$$8 + 16 + \dots + 2^{n-1} = 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n-1}$$

$$= 2^3 [1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-2}]$$

$$= 2^3 \frac{2^{n-2+1} - 1}{2 - 1} \quad \text{car } 1 + 2 + \dots + 2^{n-2} = \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1}$$

qd $2 \neq 1$

$$= 2^3 \cdot (2^{n-1} - 1) = 2^{n+2} - 8$$

On sait que $\sum_{k=1}^n k x^{k-1} = (n-1)x^n + 1$

Montrons que

① On sait que $S(2^{n+1}) = 2S(2^n) + 2^{n+1}$ $S(4) = 4$

On montre par récurrence que $S(2^n) = (n-1) \cdot 2^n$, $\forall n \geq 2$

• Initialité : pour $n=2$: $S(2^2) = S(4) = 4 = (2-1) \cdot 2^2 = 1 \cdot 2^2 = 4$ ok

• Hérité : Je prends un $n \geq 2$. Je suppose que $S(2^n) = (n-1)2^n$

(on montre que $S(2^{n+1}) = \underline{n 2^{n+1}}$)

$$\begin{aligned} S(2^{n+1}) &= 2 \cdot S(2^n) + 2^{n+1} = 2 \cdot (n-1) \cdot 2^n + 2^{n+1} \\ &= (n-1) 2^{n+1} + 2^{n+1} = \underline{n 2^{n+1}} \quad \text{ok} \end{aligned}$$

• Conclusion :

(5) Montrer que $\sum_1^n k 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Initialisation. pour $n=1$ $\sum_{k=1}^1 k 2^{k-1} = 1 \cdot 2^0 = 1$

et $(n-1)2^n + 1 = 0 \cdot 2^0 + 1 = 0 + 1 = 1$) ok

Hérédité. Je prends un $n \geq 1$. Je suppose que $\sum_1^n k 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$

(on montre que $\sum_1^{n+1} k 2^{k-1} = \underline{n 2^{n+1} + 1}$)

$$\sum_1^{n+1} k 2^{k-1} = \sum_1^n k 2^{k-1} + (n+1)2^n$$

$$= (n-1)2^n + 1 + (n+1)2^n = [(n-1) + (n+1)]2^n + 1$$

$$= 2n \cdot 2^n + 1$$

$$= \underline{n 2^{n+1} + 1} \quad \text{OK}$$

③ $\left(\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1 \right)$ hypothese über

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = \sum_{k=0}^n 2^k + 2^{n+1}$$

$$= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1}$$

$$= 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{n+2} - 1$$

OK

④

$$f(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \quad \left(x \mapsto \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \right)$$

$$f'(x) = \frac{(n+1)x^n(x-1) - 1(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(n+1)x^{n+1} - (n+1)x^n - x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{n x^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

$$\left(\sum_{k=0}^n x^k \right)' = \sum_{k=1}^n k x^{k-1} \quad \text{car } (x^k)' = k x^{k-1}$$

et car pour $k=0$, on dérive 1 et $1' = 0$

$$\sum_0^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \quad \text{on derive :}$$

$$\sum_1^n k x^{k-1} = \frac{n x^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

$$\text{en } x=2$$

$$\begin{aligned} \sum_1^n k 2^{k-1} &= \frac{n 2^{n+1} - (n+1)2^n + 1}{(2-1)^2} = n 2^{n+1} - (n+1)2^n + 1 \\ &= 2^{n+1} (n - (n+1)) + 1 \\ &= (n-1)2^n + 1 \end{aligned}$$

III Intégration par parties.

$$\int f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)] - \int f(x)g'(x)dx$$

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Une est dérivée
et
pas l'autre

pas de dérivée

c'est l'autre qui
est dérivée

$$\int g'f = [fg] - \int g f'$$

$$\text{ex 1: } I = \int (x+1)e^x dx$$

$$\text{I\&\& } \left| \begin{array}{l} f(x) = x+1 \\ g'(x) = e^x \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{l} f'(x) = 1 \\ g(x) = e^x \end{array} \right)$$

$$I = [(x+1)e^x] - \int 1 \cdot e^x dx = (x+1)e^x - e^x = \underline{x e^x}$$

$$\text{ex 2: } I = \int (2x^2+1)e^{2x} dx$$

$$\text{I\&\& } \left| \begin{array}{l} u = 2x^2+1 \\ v' = e^{2x} \end{array} \right. \Rightarrow \left(\begin{array}{l} u' = 4x \\ v = \frac{e^{2x}}{2} \end{array} \right)$$

$$I = \left[(2x^2+1) \frac{e^{2x}}{2} \right] - \int 4x \cdot \frac{e^{2x}}{2} dx = \left[(2x^2+1) \frac{e^{2x}}{2} \right] - \int 2x e^{2x} dx$$

$$\text{I\&\& } \left| \begin{array}{l} u = 2x \\ u' = 2 \\ v = \frac{e^{2x}}{2} \\ v' = e^{2x} \end{array} \right.$$

$$I = (2x^2+1) \frac{e^{2x}}{2} - \left[2x \frac{e^{2x}}{2} \right] + \int 2 \cdot \frac{e^{2x}}{2} dx$$

$$J = \underbrace{(2x^2+1)\frac{e^{2x}}{2} - xe^{2x} + \frac{e^{2x}}{2}} + cde = \dots$$

ex 3. $I = \int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx$ I&R $\left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ u' = 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} v = \frac{1}{x} \\ v' = -\frac{1}{x^2} \end{array}$

$$I = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x^2} dx = x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} dx = \underline{x \ln(x) - x} + cde$$

ex 4: $\int_2^3 \arctan x dx = K$ I&R $\left| \begin{array}{l} u' = 1 \\ u = x \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} v = \arctan x \\ v' = \frac{1}{1+x^2} \end{array}$

$$K = [x \arctan x]_2^3 - \int_2^3 \frac{x}{1+x^2} dx$$

Chgt de variable $t = 1 + x^2$

$$\frac{dt}{dx} = 2x \Rightarrow dt = 2x dx$$

$$\Rightarrow dx = \frac{dt}{2x}$$

$$K = 3 \arctan(3) - 2 \arctan(2) - \int_5^{10} \frac{x}{t} \frac{dt}{2x}$$

$$K = 3 \arctan(3) - 2 \arctan(2) - \left[\frac{\ln(t)}{2} \right]_5^{10} = 3 \arctan(3) - 2 \arctan(2) - \frac{\ln(10)}{2} + \frac{\ln(5)}{2}$$

IV Equa diff d'ordre 1 à coefficients constants et avec un second membre simple

$$a y' + b y = c(x)$$

const

fonction simple: càd

un polynôme
ou
polynôme \times exp
 $\alpha \sin(\omega x) + \beta \cos(\omega x)$

On cherche les fonctions $x \mapsto y(x)$

$$(41) \quad a y' + b y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{b}{a} y$$

Quand le second membre vaut 0, on dit que l'équa diff est homogène

spéc: $(e^{ax})' = a e^{ax}$ Si $y(x) = e^{ax}$ $y' = a y$



les solutions de $y' = ay$ sont les $y(x) = A \cdot e^{ax}$

les sols de $ay' + by = 0$ sont les $y(x) = A e^{-\frac{b}{a}x}$

où A est une constante réelle

(4.2) $ay' + by = c(x)$ avec $c(x)$ une fonction simple

On cherche une solution particulière de la \hat{m} forme

Si $c(x)$ est un polynôme, alors la sol particulière est un polynôme de \hat{m} degré.

Si $c(x)$ est de la forme $\alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$, alors la sol particulière est de la \hat{m} forme.

ex1: Trouver une solution particulière pour l'éqo diff $y' - 3y = x^2 - 2x + 3$

On cherche une sol de la forme $y_p = ax^2 + bx + c$

$$y'_p = 2ax + b$$

$$y'_p - 3y_p = 2ax + b - 3(ax^2 + bx + c)$$
$$= -3ax^2 + (2a - 3b)x + b - 3c$$

$$= x^2 - 2x + 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3a = 1 \\ 2a - 3b = -2 \\ b - 3c = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$
$$3b = 2a + 2 = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3} \Rightarrow b = \frac{4}{9}$$
$$3c = b - 3 = \frac{4}{9} - 3 = -\frac{23}{9} \Rightarrow c = -\frac{23}{27}$$

$$y_p(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{9}x - \frac{23}{27}$$