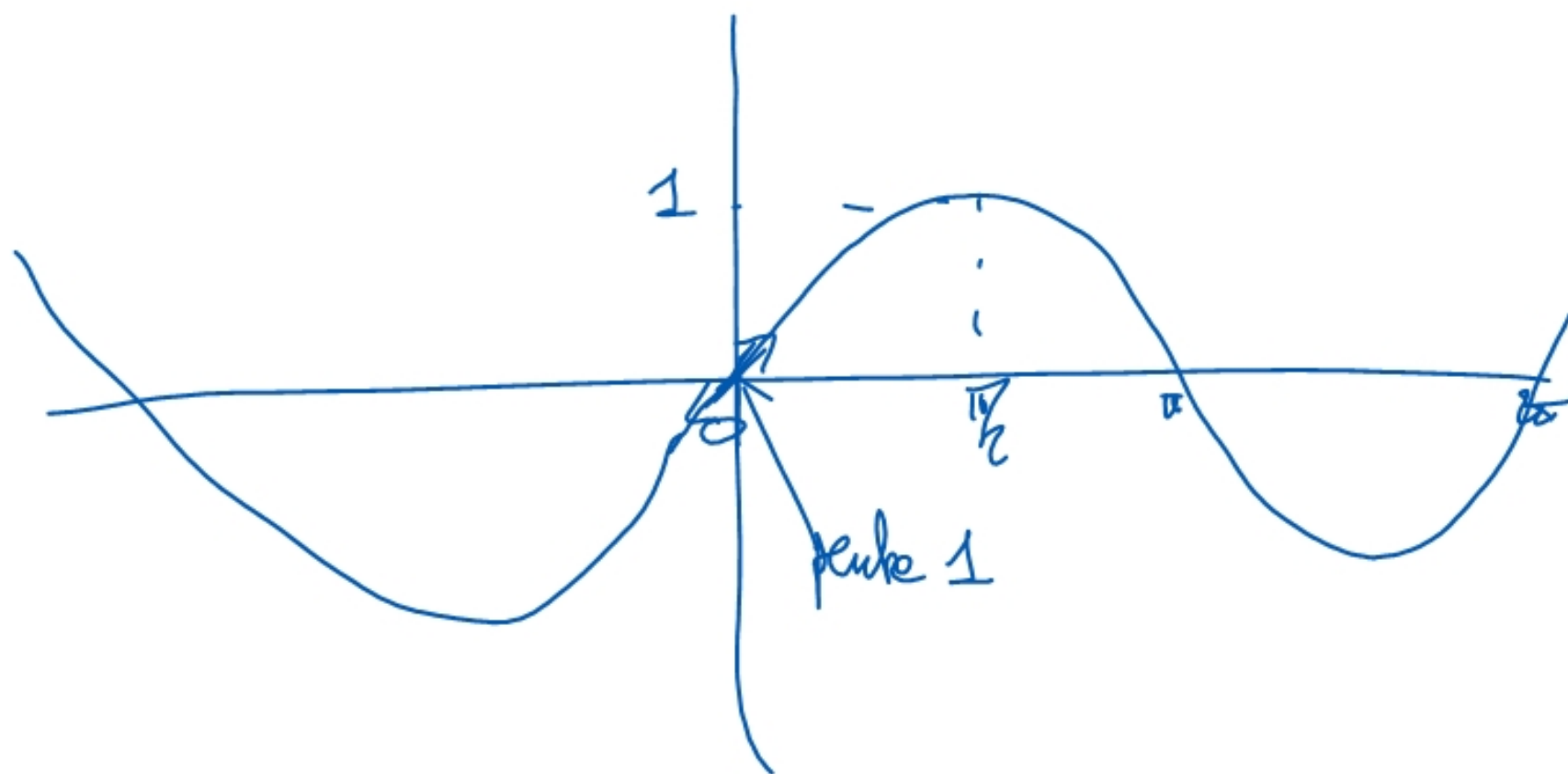


Homework

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Tuto Aux Maths

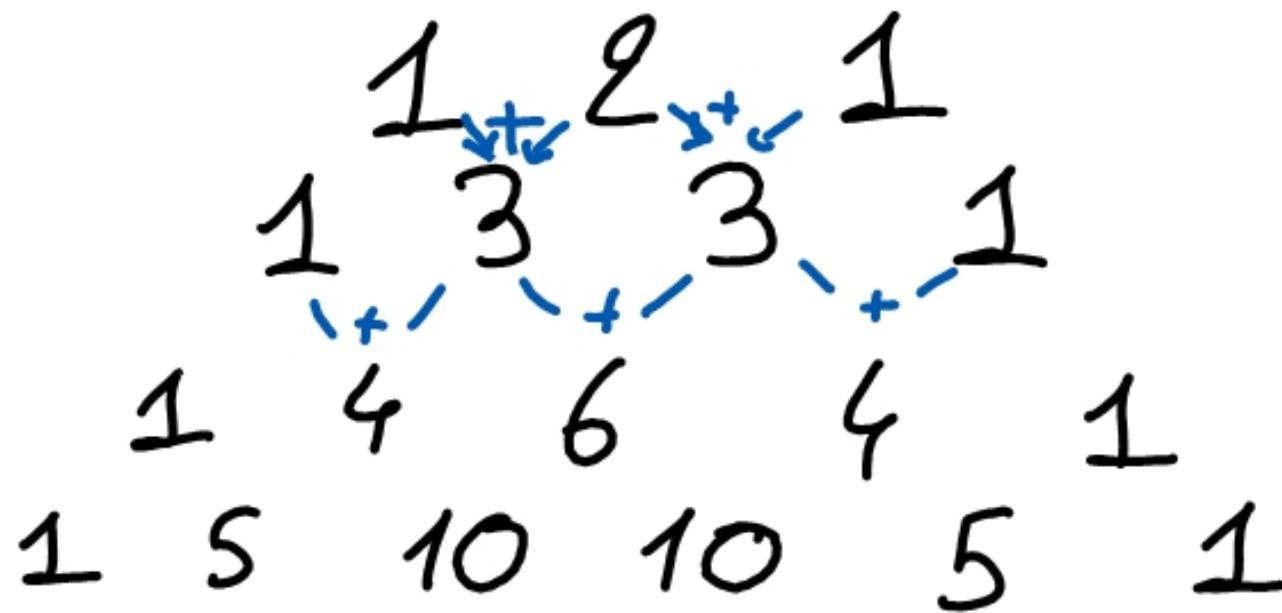
I La formule du binôme.

$$(a+h)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+h)^3 = a^3 + 3a^2h + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+h)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Triangle Pascal



$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$\binom{5}{0} = 1$$

$$\binom{5}{1} = 5$$

$$\binom{5}{2} = 10$$

$$\binom{5}{3} = 10$$

$$\binom{5}{4} = 5$$

$$\binom{5}{5} = 1$$

remarque: $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$

$$\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{120}{2 \cdot 6} = 10$$

Formule: Si $p \leq n$ $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

où $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$

ex: $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

def:

$$\sum_{p=3}^{p=7} u_p = u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7$$

ex

$$\sum_{p=3}^7 p = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25$$

$$\sum_{p=3}^7 (2p+1) = 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 55$$

$$\sum_{p=0}^{p=n} x^p = x^0 + x^1 + x^2 + \dots + x^n = ?$$

↑
1

II Raisonnement par récurrence

On doit montrer que la formule voulue
"démarré" et "se propage"

Vraie pour $n=0$ (ou 1)

Si la formule est vraie pour n ,
alors elle est vraie pour $n+1$.

□

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \geq 1$$

Initialisation:

1

$$= \frac{1 \cdot 2}{2}$$

OK!

pour $n=1$:

Hérédité: On prend un $n \geq 1$.

On suppose que $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

On doit montrer que $\underbrace{1 + 2 + \dots + n}_{1+2+\dots+n} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + (n+1) &= (1 + 2 + \dots + n) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \text{Yes!!} \end{aligned}$$

Conclusion . D'après le principe de récurrence :

$$\forall n \geq 1 \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \boxed{\quad}$$

avec le symbole Σ :

$$\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

ou $\sum_{p=1}^n p = \frac{n(n+1)}{2}$ } muettes
↓

ici p et i sont des variables muettes .

ex . $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$) ici , x et t
 $\int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$) sont des
variables muettes



$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \text{ quand } x \neq 1$$

$\forall n \geq 1$

$$= n + 1 \text{ quand } x = 1$$

Somme partielle géométrique

Démo qd $x \neq 1$

[Initialisation : pour $n = 1$:

$$1 + x^1 = x + 1$$

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)}$$

OK

Car $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Hérédité: Je prends un $n \geq 1$. Je suppose que

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

(On veut montrer que: $1 + x + x^2 + \dots + x^{n+1} = \frac{x^{n+2} - 1}{x - 1}$)

$$\begin{aligned} 1 + x + \dots + x^{n+1} &= [1 + x + \dots + x^n] + x^{n+1} = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} + x^{n+1} \\ &= \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} + \frac{x^{n+1}(x - 1)}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} + \frac{x^{n+2} - x^{n+1}}{x - 1} \\ &= \frac{\cancel{x^{n+1}} - 1 + x^{n+2} - \cancel{x^{n+1}}}{x - 1} = \frac{x^{n+2} - 1}{x - 1}. \quad \text{Ok !!} \end{aligned}$$

Conclusion: \forall après le principe de récurrence: $\forall n \geq 1$ et $x \neq 1$
 $1 + x + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ \square

$\square \forall n \geq 1, 7^n - 1$ est divisible par 6

(càd, il existe un entier p tel que $7^n - 1 = 6p$)

[Initialisation. Pour $n=1$: $7^1 - 1 = 6$ ok

Hérédité: On prend un $n \geq 1$, on suppose que $7^n - 1$ est divisible par 6. càd $7^n - 1 = 6 \cdot p$ où $p \in \mathbb{N}$

(On veut montrer que $7^{n+1} - 1 = 6 \cdot k$ où $k \in \mathbb{N}$)

On multiplie par 7. $7 \cdot (7^n - 1) = 7 \cdot 6p \Rightarrow 7^{n+1} - 7 = 6 \cdot 7p$

On ajoute 6: $7^{n+1} - 7 + 6 = 6 \cdot 7p + 6$

$$7^{n+1} - 1 = 6[7p + 1] \quad \text{Ok!!}$$

Conclusion: D'après le principe de récurrence: $\forall n \geq 1, 7^n - 1$ est div/6

$\forall n \geq 0$ $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7

Initialisation : pour $n=0$: $3^2 - 2^1 = 9 - 2 = 7$ OK

Hérédité : Je prend un $n \geq 0$. Je suppose que $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7

(on veut montrer que $3^{2(n+1)+2} - 2^{(n+1)+1}$ est divisible par 7

càd $3^{2n+4} - 2^{n+2}$ - - - -)

$3^{2n+2} - 2^{n+1} = 7 \cdot p$ où $p \in \mathbb{N}$. On multiplie par 3^2 .

$3^{2n+4} - 9 \cdot 2^{n+1} = 9 \cdot 7p$. (On fait l'ajout pour obtenir $3^{2n+4} - 2^{n+2}$)

$\left(3^{2n+4} - 9 \cdot 2^{n+1} + \boxed{9 \cdot 2^{n+1} - 2^{n+2}} = 3^{2n+4} - 2^{n+2} \right)$
Brouillon

~~On part de $3^{2n+4} - 9 \cdot 2^{n+1} = 9 \cdot 7p$~~

~~On ajoute $9 \cdot 2^{n+1} - 2^{n+2}$~~

~~On obtient : $3^{2n+4} - 9 \cdot 2^{n+1} + 9 \cdot 2^{n+1} - 2^{n+2} = 9 \cdot 7p + 9 \cdot 2^{n+1} - 2^{n+2}$~~

On part de $3^{2n+4} - 9 \cdot 2^{n+1} = 9 \cdot 7p$.

On ajoute $9 \cdot 2^{n+1} - 2^{n+2}$

On obtient $3^{2n+4} - 9 \cdot 2^{n+1} + 9 \cdot 2^{n+1} - 2^{n+2} = 9 \cdot 7p + 9 \cdot 2^{n+1} - 2^{n+2}$

$$3^{2n+4} - 2^{n+2}$$

$$= 9 \cdot 7p + 9 \cdot 2^{n+1} - 2^{n+2}$$

$$= 9 \cdot 7p + 2^{n+1} (9 - 2) = 9 \cdot 7p + 7 \cdot 2^{n+1}$$

$$= 7(9p + 2^{n+1})$$

Ok !! On conclut \square

III les symboles

\forall : Pour tout

\exists : Il existe

$/$: tel que

\in : appartient à

$!$: factoriel

\mathbb{N} est l'ensemble des entiers naturels: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

\mathbb{Z} est l'ensemble des entiers relatifs: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

\mathbb{Q} est l'ensemble des nombres rationnels c-à-d les $\frac{p}{q}$ où

$p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$

où $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$

on a en plus 0

\mathbb{R} est l'ensemble des nombres réels

\mathbb{C} est l'ensemble des nombres complexes
càd les $a+ib$ où $i^2 = -1$

ex: $(2+3i)(5-7i) = 10 - 14i + 15i + 21 = 31 + i$

\square $\sqrt{2}$ est un irrationnel càd $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

\square On suppose que $\sqrt{2}$ est un rationnel $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

où p et q sont des entiers ($q \neq 0$)

On simplifie la fraction par 2 (ex: $\frac{14}{10} = \frac{2 \cdot 7}{2 \cdot 5} = \frac{7}{5}$)

Maintenant, $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où a et b ne sont pas pairs
tous les deux.

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2 \quad a^2 \text{ est pair}$$

donc a est pair $a = 2 \cdot c$

$$(2c)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4c^2 = 2b^2$$

$$\Rightarrow 2c^2 = b^2 \quad b^2 \text{ est pair, donc } b \text{ est pair}$$

Contradiction. Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel]

$$\text{reqe : } \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

cau

$$\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$$

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

$$x^n \cdot x = x^{n+1}$$

$$\begin{aligned} - (x^{n+1} - 1) &= -x^{n+1} + 1 \\ &= 1 - x^{n+1} \end{aligned}$$

$$- (x - 1) = -x + 1$$