

## Contrôle 8

### Petits exos

#### Exo 1. Intégrales généralisées :

Quel est l'ensemble de définition de  $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(t^2-1)^x} dt$  ?

#### Exo 2. Séries numériques :

Quelle est la nature de la série de terme général  $u_n = \tan\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

#### Exo 3. Séries alternées :

Quelle est la nature de la série de terme général  $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{2/3}+(-1)^n}$

#### Exo 4. Séries entières :

Donner le rayon et la valeur de  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

#### Exo 5. Séries de Fourier :

Donner les formules permettant de calculer les coefficients  $a_0$  ;  $a_n$  et  $b_n$  .

Citer le théorème de Dirichlet et celui de Parseval.

Sachant que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$  , Calculer  $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^6}$ .

#### Exo 6. Equations de droite :

61. Donner une équation cartésienne de la droite passant par la point  $A = (2; 3)$  de pente -2.

62. Donner une équation cartésienne de la tangente à la courbe  $y = \frac{x+3}{x-1}$  au point d'abscisse 3.

63. Donner une équation cartésienne de la tangente à l'arc paramétré  $\begin{cases} x(t) = \frac{t+3}{t-1} \\ y(t) = \frac{t^3}{9} - 1 \end{cases}$  point de paramètre  $t = 3$ .

## Problème 1. Fais un gros dodo.

Maurice a des jumeaux et il n'a pas le temps de les bercer, alors il a construit une chouette berceuse.

C'est ça qu'on voit ci-dessus.

Bien sûr, il a mis de l'huile partout, ce qui fait qu'il n'y a pas de frottement. ( merci Maurice ! )

La Physique selon Plaf conduit aux équations :  $\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - k_3 x_2 \end{cases}$  On travaille en millimètres au lieu de mètres. (ce sont des bébés quand même!) Le bébé 1 pèse  $m_1 = 4kg$  . L'autre pèse  $m_2 = 5kg$ .

Maurice a acheté ses trois ressorts au bricorama du coin. Ils étaient soit disant de 1000 mm de long et de coefficients de raideur  $k=10N/mm$ .

Cependant, comme il a acheté une marque de daube, les ressorts ont pour coefficients respectifs  $k_1 \simeq 9^-$  ;  $k_2 \simeq 11^-$  et  $k_3 \simeq 9^+$ .

Pour les calculs, on gardera les valeurs littérales  $k_1$ ,  $k_2$ , et  $k_3$  .

On utilisera cependant les relations suivantes, qui se révèlent être exacte !

$$5k_1 + 9k_2 + 4k_3 = 180 \quad \text{et} \quad k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3 = 280$$

Le système conduit à  $\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\frac{k_1+k_2}{4}x_1 + \frac{k_2}{4}x_2 \\ \ddot{x}_2 = \frac{k_2}{5}x_1 - \frac{k_2+k_3}{5}x_2 \end{cases}$  ou encore à  $\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k_1+k_2}{4} & \frac{k_2}{4} \\ \frac{k_2}{5} & -\frac{k_2+k_3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

On appelle A la matrice  $A = \begin{pmatrix} -\frac{k_1+k_2}{4} & \frac{k_2}{4} \\ \frac{k_2}{5} & -\frac{k_2+k_3}{5} \end{pmatrix}$  . On appelle f l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  canoniquement associé à A.

21. (4 pts) Montrer que le vecteur  $\vec{u} = \begin{pmatrix} k_2 \\ k_1 + k_2 - 8 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -2 .

On ne demande pas de calculer le polynôme caractéristique de f. On donnera la définition de « vecteur propre »

22. (4 pts) Montrer que le vecteur  $\vec{v} = \begin{pmatrix} k_2 \\ k_1 + k_2 - 28 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -7.

23. (1 pt) Quelle est la matrice de f dans la nouvelle base  $B' = (\vec{u}, \vec{v})$  ? (On donnera d'abord la définition)

24. (2 pts) Résoudre le système d'équations différentielles dans la base B' .

25. (1 pt) Comment récupère-t-on les solutions dans la base initiale ?(on demande juste la formule)

Fin de l'histoire :

avec les conditions initiales  $y_1(0) = y_2(0) = \dot{y}_2(0) = 0$  et  $\dot{y}_1(0) = 40k_2$ , et les valeurs approchées données pour  $k_1$ ,  $k_2$ , et  $k_3$ ,

on trouve  $y_1 \simeq 100\sin(\sqrt{7}t) + 120\sin(\sqrt{2}t)$  et  $y_2(t) \simeq -80\sin(\sqrt{7}t) + 135\sin(\sqrt{2}t)$  ce qui fait que les bébés font de bonnes siestes.

## Problème 2. Séries de Fourier

On considère la fonction  $2\pi$ -périodique  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur  $[-\pi; \pi]$  par

$$\forall t \in [-\pi; \pi], \quad f(t) = \pi^2 t - t^3.$$

### Partie A

Pour  $k$  entier naturel impair et  $n$  entier naturel non nul, on considère les intégrales  $I_{k,n} = \int_0^\pi t^k \sin(nt) dt$ .

1. Calculer  $I_{1,n}$ .

2. Montrer que pour  $k \geq 3$ ,  $I_{k,n} = \frac{\pi^k (-1)^{n+1}}{n} - \frac{k(k-1)}{n^2} I_{k-2,n}$ .

3. En déduire que  $I_{3,n} = \frac{\pi^3 (-1)^{n+1}}{n} + \frac{6\pi (-1)^n}{n^3}$ .

4. En utilisant ce qui précède, montrer que  $\int_0^\pi f(t) \sin(nt) dt = \frac{6\pi (-1)^{n+1}}{n^3}$ .

### Partie B

1. Etudier la parité de la fonction  $f$ .

2. Etudier les variations de  $f$  sur le segment  $[-\pi; \pi]$ .

3. La fonction  $f$  est-elle continue sur  $\mathbb{R}$ ? Justifier.

4. On note  $S_f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nt)$  la série de Fourier de la fonction  $f$ .

(a) Déterminer les coefficients  $a_n$ .

(b) Montrer en utilisant la question A4 et en précisant les étapes du calcul que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $b_n = 12 \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$ .

5. Montrer que la série de Fourier  $S_f$  converge vers  $f$  en précisant le théorème utilisé.

6. Calculer  $S_f(\pi/2)$  et en déduire la valeur de  $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$ .

7. Montrer que  $\int_0^\pi f^2(t) dt = \frac{8\pi^7}{105}$ .

8. En appliquant la relation de Parseval à  $f$ , montrer que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$ .

9 (a) Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que  $\frac{1}{n^6} = \int_{n-1}^n \frac{1}{n^6} dt \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{t^6} dt$ .

(b) Soit  $N$  un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que  $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} \leq \frac{1}{5N^5}$ .

La partie C est faite en info.