

Contrôle 8

Petits exos

Exo 1. Intégrales généralisées :

Quel est l'ensemble de définition de $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(t^2-1)^x} dt$?

Exo 2. Séries numériques :

Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \tan\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

Exo 3. Séries alternées :

Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{2/3} + (-1)^n}$

Exo 4. Séries entières :

Donner le rayon et la valeur de $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

Exo 5. Séries de Fourier :

Donner les formules permettant de calculer les coefficients a_0 ; a_n et b_n .

Citer le théorème de Dirichlet et celui de Parseval.

Sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$, Calculer $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^6}$.

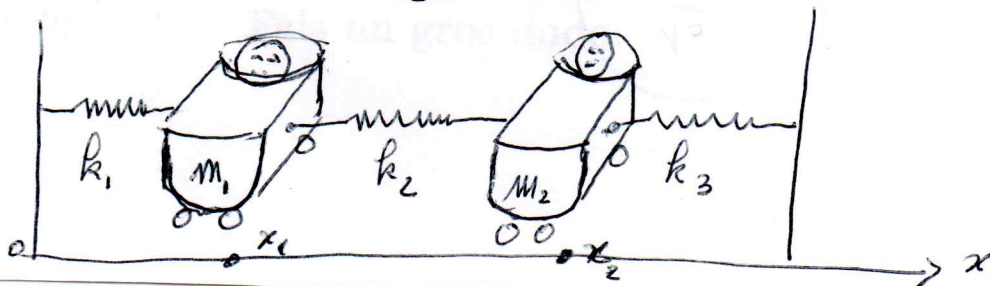
Exo 6. Equations de droite :

61. Donner une équation cartésienne de la droite passant par la point $A = (2; 3)$ de pente -2.

62. Donner une équation cartésienne de la tangente à la courbe $y = \frac{x+3}{x-1}$ au point d'abscisse 3.

63. Donner une équation cartésienne de la tangente à l'arc paramétré $\begin{cases} x(t) = \frac{t+3}{t-1} \\ y(t) = \frac{t^3}{9} - 1 \end{cases}$ point de paramètre $t = 3$.

Problème 1. Fais un gros dodo.



Maurice a des jumeaux et il n'a pas le temps de les bercer, alors il a construit une chouette berceuse.

C'est ça qu'on voit ci-dessus.

Bien sûr, il a mis de l'huile partout, ce qui fait qu'il n'y a pas de frottement. (merci Maurice!)

La Physique selon Plaf conduit aux équations :
$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 (x_2 - x_1) - k_3 x_2 \end{cases}$$
 On travaille en millimètres au lieu de mètres. (ce sont des bébés quand même!) Le bébé 1 pèse $m_1 = 4\text{kg}$. L'autre pèse $m_2 = 5\text{kg}$.

Maurice a acheté ses trois ressorts au bricorama du coin. Ils étaient soit disant de 1000 mm de long et de coefficients de raideur $k=10\text{N/mm}$.

Cependant, comme il a acheté une marque de daube, les ressorts ont pour coefficients respectifs $k_1 \simeq 9^-$; $k_2 \simeq 11^-$ et $k_3 \simeq 9^+$.

Pour les calculs, on gardera les valeurs littérales k_1 , k_2 , et k_3 .

On utilisera cependant les relations suivantes, qui se révèlent être exacte!

$$5k_1 + 9k_2 + 4k_3 = 180 \quad \text{et} \quad k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3 = 280$$

Le système conduit à
$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\frac{k_1+k_2}{4}x_1 + \frac{k_2}{4}x_2 \\ \ddot{x}_2 = \frac{k_2}{5}x_1 - \frac{k_2+k_3}{5}x_2 \end{cases}$$
 ou encore à
$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k_1+k_2}{4} & \frac{k_2}{4} \\ \frac{k_2}{5} & -\frac{k_2+k_3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

On appelle A la matrice $A = \begin{pmatrix} -\frac{k_1+k_2}{4} & \frac{k_2}{4} \\ \frac{k_2}{5} & -\frac{k_2+k_3}{5} \end{pmatrix}$. On appelle f l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 canoniquement associé à A.

21. (4 pts) Montrer que le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} k_2 \\ k_1 + k_2 - 8 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -2.

On ne demande pas de calculer le polynôme caractéristique de f. On donnera la définition de « vecteur propre »

22. (4 pts) Montrer que le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} k_2 \\ k_1 + k_2 - 28 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -7.

23. (1 pt) Quelle est la matrice de f dans la nouvelle base $B' = (\vec{u}, \vec{v})$? (On donnera d'abord la définition)

24. (2 pts) Résoudre le système d'équations différentielles dans la base B'.

25. (1 pt) Comment récupère-t-on les solutions dans la base initiale?(on demande juste la formule)

Fin de l'histoire :

avec les conditions initiales $y_1(0) = y_2(0) = \dot{y}_2(0) = 0$ et $\dot{y}_1(0) = 40k_2$, et les valeurs approchées données pour k_1, k_2 , et k_3 ,

on trouve $y_1 \simeq 100\sin(\sqrt{7}t) + 120\sin(\sqrt{2}t)$ et $y_2(t) \simeq -80\sin(\sqrt{7}t) + 135\sin(\sqrt{2}t)$ ce qui fait que les bébés font de bonnes siestes.

Problème 2. Séries de Fourier

On considère la fonction 2π -périodique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur $[-\pi; \pi]$ par

$$\forall t \in [-\pi; \pi], \quad f(t) = \pi^2 t - t^3.$$

Partie A

Pour k entier naturel impair et n entier naturel non nul, on considère les intégrales $I_{k,n} = \int_0^\pi t^k \sin(nt) dt$.

1. Calculer $I_{1,n}$.
2. Montrer que pour $k \geq 3$, $I_{k,n} = \frac{\pi^k (-1)^{n+1}}{n} - \frac{k(k-1)}{n^2} I_{k-2,n}$.
3. En déduire que $I_{3,n} = \frac{\pi^3 (-1)^{n+1}}{n} + \frac{6\pi (-1)^n}{n^3}$.
4. En utilisant ce qui précède, montrer que $\int_0^\pi f(t) \sin(nt) dt = \frac{6\pi (-1)^{n+1}}{n^3}$.

Partie B

1. Etudier la parité de la fonction f .
2. Etudier les variations de f sur le segment $[-\pi; \pi]$.
3. La fonction f est-elle continue sur \mathbb{R} ? Justifier.
4. On note $S_f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nt)$ la série de Fourier de la fonction f .
 - (a) Déterminer les coefficients a_n .
 - (b) Montrer en utilisant la question A4 et en précisant les étapes du calcul que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $b_n = 12 \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$.
5. Montrer que la série de Fourier S_f converge vers f en précisant le théorème utilisé.
6. Calculer $S_f(\pi/2)$ et en déduire la valeur de $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$.
7. Montrer que $\int_0^\pi f^2(t) dt = \frac{8\pi^7}{105}$.
8. En appliquant la relation de Parseval à f , montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$.
- 9 (a) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que $\frac{1}{n^6} = \int_{n-1}^n \frac{1}{t^6} dt \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{t^6} dt$.
 - (b) Soit N un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} \leq \frac{1}{5N^5}$.

La partie C est faite en info.