

Contrôle 6

Exo 1 :

DL à l'ordre 2 en $\frac{\pi}{6}$ de $f(x) = e^{\sin(x)}$, puis équation de la tangente en $\frac{\pi}{6}$ et position de la courbe par rapport à la tangente.

Exo 2 :

Calculer $C_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \cos(kx)$

Exo 3 :

Factoriser le polynôme $P(X) = X^3 + 27$ dans \mathbb{C} puis dans \mathbb{R} .

Exo 4 :

Réduire en éléments simples la fraction $F(X) = \frac{4}{X^4-1}$.

Exo 5 :

$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Quelle est l'équation de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point d'abscisse $x = 2$?

Exo 6 :

$\begin{cases} x(t) = \frac{t+1}{t-1} \\ y(t) = t^3 - 6 \end{cases}$. Quel est l'équation de la tangente à cet arc paramétré au point de paramètre $t = 2$?

Exo 7 :

Choisissez un point A de \mathbb{R}^3 n'ayant aucune coordonnée nulle.

Choisissez un vecteur \vec{u} de \mathbb{R}^3 qui n'est pas parallèle aux axes.

Donner les équations paramétriques de la droite D passant par A, de vecteur directeur \vec{u} .

En déduire ses équations cartésiennes.

Donner l'équation du plan orthogonal à D passant par le point B(1;2;3).

Donner une base de P. Quelle est la distance de P au point C(-1;1;2)?

PROBLEME

Introduction

On s'intéresse aux différents problèmes liés à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

Un problème qui pourrait être issu de l'élec avec un système d'équations différentielles d'ordre 1, obtenues à partir de la loi des Mailles ou de la loi des Noeuds :

$$\boxed{P_1} \begin{cases} -2\frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} = a(t) \\ \frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt} + 2\frac{dz}{dt} = b(t) \\ -\frac{dx}{dt} - 3\frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} = c(t) \end{cases} \quad \text{où les inconnues sont des intensités ou des tensions } x(t); y(t) \text{ et } z(t) \text{ et où les fonctions } a; b \text{ et } c \text{ sont données.}$$

Un problème qui pourrait être issu de la physique ou de la mécanique avec des équations différentielles d'ordre 2, obtenues à partir du principe fondamental de la dynamique :

$$\boxed{P_2} \begin{cases} -2\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2z}{dt^2} = a(t) \\ \frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{d^2z}{dt^2} = b(t) \\ -\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2z}{dt^2} = c(t) \end{cases} \quad \text{où les inconnues sont des coordonnées } x(t); y(t) \text{ et } z(t) \text{ et où les fonctions } a; b \text{ et } c \text{ sont données.}$$

Ou encore des problèmes purement mathématiques concernant les systèmes ou les suites :

$$\boxed{P_3} \begin{cases} -2y - z = a \\ x + 4y + 2z = b \\ -x - 3y - z = c \end{cases} \quad \text{où les inconnues sont les points ou les vecteurs de coordonnées } (x; y; z) \text{ et où les } a; b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels ou complexes donnés.}$$

ou bien

$$\boxed{P_4} \begin{cases} u_{n+1} = -2v_n - w_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n + 2w_n \\ w_{n+1} = -u_n - 3v_n - w_n \end{cases} \quad \text{où l'on cherche la valeur des suites } (u_n)_{n \in \mathbb{N}}; (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Partie I : Réduction de la matrice A

On appelle $\mathcal{B} = (\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

On appelle f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans \mathcal{B} est $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Quelle est la définition de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$?

2. On pose $\vec{u} = (-1; 1; -1)$; $\vec{v} = (0; 1; -1)$ et $\vec{w} = (3; -4; 5)$

Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ est une base de \mathbb{R}^3 .

3. Quelle est la matrice de passage P de \mathcal{B} à \mathcal{B}' ? (On commencera par donner la définition de « matrice de passage »)

4. Calculer l'inverse de P .

5. On appelle A' la matrice de f dans la base \mathcal{B}' . Quelle est la définition de A' ?

6. Donner la formule de changement de base reliant la matrice A' à la matrice A .

7. Calculer A' grâce à cette formule de changement de base.

8. Donner les coordonnées de $f(\vec{u})$; $f(\vec{v})$ et $f(\vec{w})$ dans la base \mathcal{B} .

9. Vérifier que $f(\vec{v}) = \vec{u} + \vec{v}$ et que $f(\vec{w}) = \vec{v} + \vec{w}$.

En déduire les coordonnées de $f(\vec{u})$; $f(\vec{v})$ et $f(\vec{w})$ dans la base \mathcal{B}' et que $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Et voilà, nous venons d'attraper une base dans laquelle les calculs seront beaucoup plus simple !

Partie II : Equa diff d'ordre 1

10. Donner l'écriture matricielle du système P_1 et en déduire qu'il devient dans \mathcal{B}' :

$$\boxed{P'_1} \begin{cases} \frac{dx'}{dt} + \frac{dy'}{dt} & = a'(t) \\ \frac{dy'}{dt} + \frac{dz'}{dt} & = b'(t) \\ \frac{dz'}{dt} & = c'(t) \end{cases}$$

$$\text{où } \begin{pmatrix} a'(t) \\ b'(t) \\ c'(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix} \text{ et où } \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Attention, ici les a' ; b' ; c' ; x' ; y' ; z' ne sont pas des dérivées, mais des coordonnées dans la base \mathcal{B}' .

Les dérivées sont notées comme en physique : $\frac{df}{dt}$ pour les dérivées premières et $\frac{d^2f}{dt^2}$ pour les dérivées secondes.

11. Résoudre le cas particulier où $c'(t) = 6\cos(2t)$; $b'(t) = 2t$ et $a'(t) = x'(t) + 2t - 6\cos(2t)$

(indication : pour trouver z' , puis y' , il suffit d'intégrer c' puis $b'-c'$)

12. En déduire dans ce cas particulier les solutions $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ du problème P_1 .

Partie III : Equa diff d'ordre 2

13. Donner l'écriture matricielle du système P_2 et en déduire qu'il devient dans \mathcal{B}' :

$$\boxed{P'_2} \begin{cases} \frac{d^2x'}{dt^2} + \frac{d^2y'}{dt} = a'(t) \\ \frac{d^2y'}{dt^2} + \frac{d^2z'}{dt^2} = b'(t) \\ \frac{d^2z'}{dt^2} = c'(t) \end{cases}$$

$$\text{où } \begin{pmatrix} a'(t) \\ b'(t) \\ c'(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix} \text{ et où } \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

On constate que les équations différentielles obtenues sont nettement plus simples !

14. Trouver la fonction z' solution de la 3ième équation lorsque $c'(t) = -z'(t)$ avec les conditions initiales $z'(0) = 0$ et $\frac{dz'}{dt}(0) = 2$.

15. Vérifier que lorsque $b'(t) = 2\frac{dy'}{dt} - y'(t)$, la 2ième équation devient $\frac{d^2y'}{dt^2} - 2\frac{dy'}{dt} + y'(t) = 2\sin(t)$

16. Trouver la solution y' telle que $y'(0) = 1$ et $\frac{dy'}{dt}(0) = 3$

17. Vérifier que lorsque $a'(t) = 3\frac{dx'}{dt} - 2x'(t) + 6e^t + 3te^t - \cos(t)$, la première équation devient $\frac{d^2x'}{dt^2} - 3\frac{dx'}{dt} + 2x'(t) = 0$.

18. Trouver la solution x' telle que $x'(0) = 1$ et $\frac{dx'}{dt}(0) = 2$.

Partie IV : Un système

19. Rappeler la formule de changement de base pour les vecteurs.

20. Donner l'écriture matricielle du système P_3 avec $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et en déduire qu'il devient dans \mathcal{B}' :

$$\boxed{P'_3} \begin{cases} x' + y' = 1 \\ y' + z' = 1 \\ z' = 1 \end{cases}$$

21. Résoudre le système P'_3 et en déduire la solution du système P_3 .

Partie V : Suites

22. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Vérifier que le système P_4 se traduit par $X_{n+1} = AX_n$.

23. La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison A . Que vaut X_n en fonction de A et X_0 ?

24. Il faut donc calculer A^n . Pour cela, on commence par calculer A^n .

On décompose A comme suit : $A = I_3 + B$ où $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$.

25. Expliquer pourquoi on peut utiliser la formule du binôme. En déduire que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

26. Vérifier ce résultat par récurrence pour $n \geq 1$.

27. Quel calcul doit-on effectuer pour récupérer A^n ? On ne demande pas de faire ce calcul.