

# Contrôle 5

## Exo 1. Espaces vectoriels

P est le plan vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  d'équation cartésienne :  $2x - y - 3z = 0$ .

Montrer que P est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

Trouver une base de P ainsi qu'un sev supplémentaire à P.

## Exo 2. Applications linéaires

Montrer que l'application  $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + 3y, 2x + 6y) \end{array} \right.$  est linéaire.

Donner son noyau et son image. Dire si elle est injective, surjective, bijective.

## Exo 3. Equations différentielles d'ordre 2

31. Intégrer l'équation différentielle suivante :  $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = -25\sin(2x)$

32. Trouver la solution de  $y'' + y' - 2y = (12x - 5)e^x$  telle que  $y(0) = 2$  et  $y'(0) = -1$  ( Fip 2017 )

## Exo 4. Intégration par partie et récurrence

On souhaite calculer la valeur de l'intégrale  $I_{p,n} = \int_0^1 x^p(1-x)^n dx$  où n et p sont des entiers naturels.

41. Quelle est la dérivée de la fonction  $x \longmapsto (1-x)^{n+1}$  ?

42. Quelle est une primitive de la fonction  $x \longmapsto x^p$  ?

43. Dans  $I_{p,n+1}$ , on effectue une intégration par partie à l'aide des questions précédentes.

Montrer que pour tout entiers p et n positifs :  $I_{p,n+1} = \frac{n+1}{p+1} I_{p+1,n}$ .

44. Calculer  $I_{p,0}$  ;  $I_{p,1}$  et  $I_{p,2}$ . On pourra pour  $I_{p,1}$  et  $I_{p,2}$  utiliser le résultat de la question précédente.

45. Montrer par récurrence sur n que  $\forall p \in \mathbb{N}$ ,  $I_{p,n} = \frac{n!p!}{(n+p+1)!}$ , pour tout n entier naturel.

Pour l'hérédité, on utilise le résultat de la question 43.

46. Rappeler la formule du binôme de Newton.

47. Grâce à cette formule, développer  $(1-x)^n$ . En déduire que  $I_{p,n} = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1}$ .

## Limites et développements limités :

1. DL à l'ordre 2 au voisinage de  $\frac{\pi}{3}$  de la fonction  $f(x) = e^{\cos(x)}$

En déduire l'équation de la tangente à f en  $\frac{\pi}{3}$  ainsi que la position de la courbe par rapport à sa tangente.

# PROBLEME

## Partie I : Etude d'un arc paramétré

Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  on considère la courbe C de représentation paramétrique : 
$$\begin{cases} x(t) = \tan(t) \\ y(t) = \frac{\sin^3(t)}{\cos(t)} \end{cases}$$

Le point de la courbe C de paramètre t est noté M(t). Ainsi,  $M(t) = \begin{pmatrix} \tan(t) \\ \frac{\sin^3(t)}{\cos(t)} \end{pmatrix}$

1. Donner l'ensemble de définition de C.
2. Montrer que x et y sont de période  $\pi$ .
3. Etudier la parité de x et y. En déduire un intervalle minimal I d'étude et expliquer comment on récupère la courbe.
4. Etudier le dérivabilité des fonctions x(t) et y(t) sur l'intervalle I.
5. Donner les valeurs de M(t) et des vecteurs tangents  $\overrightarrow{T}(t)$  aux points de paramètre 0 et  $\frac{\pi}{4}$ . Donner l'équation de la tangente en  $\frac{\pi}{4}$ .
6. Donner les limites en  $\frac{\pi}{2}^-$  des fonctions x et y. Chercher l'éventuelle asymptote.
7. Dresser le tableau de variation commun des fonctions x et y.
8. Donner la représentation graphique de la courbe C. On y fera apparaître les points M(0);  $M(\frac{\pi}{4})$  ainsi que l'asymptote. On veut toute la courbe.
9. Donner les composantes d'un vecteur tangent  $\overrightarrow{T}(t)$  et d'un vecteur normal  $\overrightarrow{N}(t)$  au point M(t) de paramètre t de la courbe C.
10. Montrer que la droite tangente au point M(t) à la courbe C a pour équation :

$$y = \sin^2(t)(1 + 2\cos^2(t))x - 2\sin^3(t)\cos(t)$$

## Partie II : Un calcul d'aire.

11. On souhaite calculer l'aire de la surface délimitée par l'axe des x; la courbe pour t variant entre 0 et  $\frac{\pi}{4}$ ; et la droite d'équation  $x = 1$ . Faites un dessin.

Si la courbe était décrite par  $y = f(x)$ , alors cette aire vaudrait  $A = \int_{x=0}^{x=1} f(x)dx = \int_{x=0}^{x=1} ydx$ .

Mais ici, x et y sont des fonctions de t suivantes : 
$$\begin{cases} x(t) = \tan(t) \\ y(t) = \frac{\sin^3(t)}{\cos(t)} \end{cases}$$

Calculer  $x'(t) = \frac{dx}{dt}$  et en déduire que  $A = \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3(t)}{\cos^3(t)} dt$

12. Donner une primitive des fonctions  $T \rightarrow \frac{1}{T}$  et  $T \rightarrow \frac{1}{T^3}$ . En déduire la valeur de  $I = \int \frac{T^2-1}{T^3} dT$

13. Montrer que le changement de variable  $T = \cos(t)$  dans l'intégrale  $A = \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3(t)}{\cos^3(t)} dt$  conduit à

$$A = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{T^2-1}{T^3} dT$$

Indication :  $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ .

14. En déduire que  $A = \frac{1-\ln(2)}{2}$ .