

Contrôle 3

Définitions et théorèmes :

1. Donner la définition d'une suite géométrique
2. Qu'est-ce qu'une fonction paire ?
3. Donner la définition d'affixe et d'image.
4. Citer la formule de Taylor.
5. Donner la définition de produit scalaire et de produit vectoriel.

Calcul :

Trouver les réels x tels que $\sqrt{2x^2 + 4x + 4} > 2x - 2$

Equations différentielle :

1. Intégrer l'équa diff suivante : $xy'(x) - 2y(x) = \frac{x^2}{\ln(x)}$
2. Trouver la solution f de l'équa diff $y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = (-13x + 33)e^{2x}$ telle que $f(0) = 3$ et $f'(0) = 7$

Limites et développement limités :

1. DL à l'ordre 2 au voisinage de $\frac{\pi}{3}$ de la fonction $f(x) = e^{\cos(x)}$
En déduire l'équation de la tangente à f en $\frac{\pi}{3}$ ainsi que la position de la courbe par rapport à sa tangente.
2. On rappelle que $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}t^3 + o(t^3)$.
Donner le DL à l'ordre 3 en 0 de $f(x) = (1+2x)^{-3}$.
Quelle est l'équation de la tangente à f en 0 ?
Quelle est la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente ?
3. Donner un équivalent en 0 et en $+\infty$ de $f(x) = \frac{e^x + x^3}{x^2 + 2}$. Justifier.
En déduire la limite de f en $+\infty$. Ici aussi, on aura pris soin de justifier le résultat proposé.
4. Donner un équivalent en 2^+ de $\sqrt{x^2 - 3x + 2}$

Les nombres complexes : (Insa de Strasbourg 2019)

1. $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ $z_2 = 1 + i$
Calculer le module et l'argument de z_1 ; z_2 ; $z_1 \times z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$ et l'argument de $(z_1)^{2020}$
2. Mettre sous la forme $a + ib$ les complexes suivants, puis représenter les dans le plan complexe.
 $(1 - 2i)(2 + i)$ $\frac{1-2i}{2+i}$ $(1 - i\sqrt{3})^3$ $e^{i5\pi/6}$
3. Donner les racines cubique de i et de -8 .

Problème 1 : Géométrie plane

Dans ce problème, on voit pourquoi c'est la parabole que l'on utilise pour notre télévision.

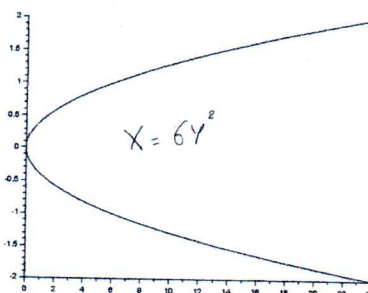
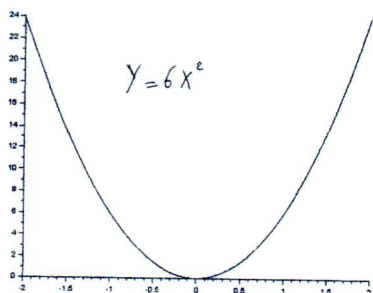
Les trois parties sont indépendantes.

Partie 1 :

Où l'on voit que l'équation d'une parabole se ramène à une équation du type $Y = aX^2$ ou $X = aY^2$

Une parabole orientée vers le Nord a pour équation : (E) $y = ax^2 + bx + c$ où $a > 0$.

La même parabole orientée vers la droite a la même équation en intervertissant x et y.



11. Mettre l'équation (E) sous la forme : $y = a(g(x)) + c$. (0.5)

12. Mettre $g(x)$ sous la forme $(x + d)^2 - e^2$ où d et e sont des nombres réels. (0.5)

13. Mettre alors (E) sous la forme : $y + h = a(x + d)^2$ où h est un nombre réel que l'on exprimera en fonction de a, b et c. (0.5)

14. En déduire un changement de repère conduisant à $Y = aX^2$.

On donnera X et Y en fonction de x, y et de a, b et c. (0.5)

Partie 2 :

Où l'on voit que toutes les ondes arrivant de l'antenne la plus proche se réfléchissent sur la parabole pour arriver toutes au même endroit !

On s'intéresse à la parabole d'équation $X = aY^2$.

La partie supérieure a donc pour équation $Y = \sqrt{\frac{X}{a}}$ où $X \in \mathbb{R}^+$.

On appelle f la fonction numérique définie par : $f(X) = \sqrt{\frac{X}{a}}$ pour $X > 0$.

On choisit $X_0 > 0$ et on appelle M_0 le point de la courbe représentative de f d'abscisse X_0 .

21. Calculer $f'(X)$. (0.5)

22. Ecrire la formule de Taylor en X_0 à l'ordre 1 pour la fonction f. (0.5)

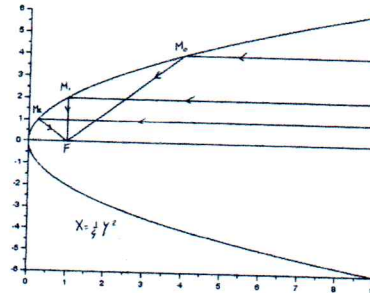
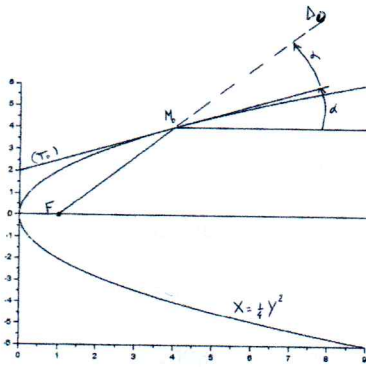
23. En déduire que l'équation de la tangente (T_0) à la courbe $Y = f(X)$ en M_0 est :

$$Y = \frac{1}{2\sqrt{aX_0}}X + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{X_0}{a}}. \quad (0.5)$$

24. On appelle α l'angle entre l'horizontale et la droite (T_0) .

Montrer que $\tan(\alpha) = f'(X_0)$. C'est aussi la pente de la droite tangente (T_0) . (0.5)

25. Une onde arrivant horizontalement sur la parabole est réfléchiée symétriquement par rapport à la tangente (T_0) .



La droite Δ_0 sur laquelle se déplace l'onde ainsi réfléchiée a donc pour pente $\tan(2\alpha)$.

Elle passe par le point de la courbe d'abscisse X_0 .

Donner l'équation de Δ_0 en fonction de X_0 et de $\tan(2\alpha)$. (1 pt)

26. Montrer que $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$. (0.5)

27. A l'aide de la question 24, exprimer $\tan(2\alpha)$ en fonction de a et de X_0 . (0.5)

28. Montrer que la droite Δ_0 coupe l'axe des abscisses en un point F ne dépendant pas de X_0 .

Ce point F est appelé le **foyer** de la parabole. (1.5)

Partie 3 :

Où l'on voit que les ondes parties de l'antenne arrivent toutes en $F(\frac{1}{4a}, 0)$ au même moment!!!

31. L'antenne est située à une longueur L de l'axe des Y .

On appelle D la droite d'équation $X = -\frac{1}{4a}$.

Quelle est la distance de $M_0(X_0, \sqrt{\frac{X_0}{a}})$ à la droite D ? (0.5)

32. Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{FM_0}$? Quelle est la distance de M_0 à F ? (0.5+1)

33. Conclure. (1 pt)

Problème 2 : géométrie dans \mathbb{R}^3

L'espace étant rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1;2;2)$, $B(3;2;1)$ et $C(1;3;3)$.

1. Montrer que les trois points A ; B et C déterminent un plan. Donner une équation cartésienne de ce plan.
2. On considère les plans (P_1) et (P_2) d'équations respectives :
 $(P_1) : x - 2y + 2z - 1 = 0$ $(P_2) : x - 3y + 2z + 2 = 0$
21. Montrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants (on notera (D) leur droite d'intersection)
22. Prouver que l'un des points déjà défini dans le problème appartient à (D) .
23. Déterminer un vecteur directeur \vec{u} de la droite (D) .
24. En déduire une représentation paramétrique de la droite (D) .
25. En déduire les coordonnées du point M de la droite (D) tel que \overrightarrow{AM} et \vec{u} soient orthogonaux.
26. En déduire la distance de A à la droite (D) .