

Problème

Le but de ce problème est de trouver une formule donnant le score au jeu 2048.

On appellera S ce score.

Règles du jeu

On n'est pas obligé de comprendre les règles pour faire le problème, donc ne vous attardez pas sur cette partie ni sur l'exemple.

On nous donne au début un tableau 4-4 avec deux 2.

			2
	2		

On peut déplacer tout vers la droite, vers la gauche, vers le haut ou vers le bas.

Deux nombres identiques se regroupent.

Dans une case vide apparaît un 2 ou un 4.

On recommence tant qu'on peut.

Lorsque deux nombres a identiques se regroupent, on marque $a+a = 2a$ points.

Un exemple

Par exemple, dans le cas précédent, on choisit de déplacer tout vers la gauche (pourquoi pas)

2			
2			
		2	

On obtient le tableau

dans lequel un 2 est apparu vers le bas.

On recommence en déplaçant cette fois tout vers le haut (pourquoi pas)

4		2	
			2

On obtient le tableau

dans lequel les deux 2 de gauche se sont regroupés

pour faire le 4; et dans lequel il est apparu un 2 en bas à droite.

Première partie : Cas où il ne sort que des 2

Dans le vrai jeu, il sort des 2 et des 4. Pour faire plus simple, on va supposer dans un premier temps qu'il ne sort que des 2.

On explique ici l'obtention de la formule $(F_1) \quad S(2^{n+1}) = 2.S(2^n) + 2^{n+1}$.

Seule cette formule est utile pour faire le problème, donc ne vous attardez pas sur ces explications et démarrez au plus vite par la question 1

Lorsque deux nombres a identiques se regroupent, on marque $a+a = 2a$ points.

Par exemple, lorsqu'on colle deux 8 pour faire un 16, on marque 16 points.

Le score pour obtenir 16 est donc $S(16) =$ « le nombre de points pour obtenir les deux 8 » plus « les 16 points obtenus en recollant les deux 8 ».

On écrit : $S(16) = 2.S(8) + 16$.

Que vaut $S(8)$? $S(8) = 2.S(4) + 8$.

Que vaut $S(4)$? $S(4) = 4$. (on a regroupé deux 2)

Une première façon de calculer le score pour atteindre 2048 est de regarder le jeu à l'instant suivant :

		1024	1024
			2

On voit que $S(2048) = 2.S(1024) + 2048$

Une première formule générale sera donc : $S(2^{n+1}) = 2.S(2^n) + 2^{n+1}$. (F_1)

1. Grâce à (F_1) , montrer par récurrence sur n que $\forall n \geq 2; S(2^n) = (n - 1)2^n$. (F_2)

Une autre façon de calculer le score pour atteindre 2048 est de regarder le jeu à l'instant suivant :

128	256	512	1024
8	16	32	64
4	4		

Ici, le nombre de points total s'obtient comme suit :

Pour en arriver là, on a marqué les points pour faire les deux 4, le 8, ... , le 512 et le 1024 (c'est à dire $S(4) + S(4) + S(8) + \dots + S(1024)$)

Enfin, pour faire 2048, on va regrouper tous ces nombres : On marquera : 8 (pour le regroupement des deux 4) ;

puis 16 (pour le regroupement des deux 8) ; puis ... , puis 2048 (pour le regroupement des deux 1024)

Ce qui nous fait : $S(2048) = \ll S(4) + S(4) + S(8) + \dots + S(1024) \gg + \ll 8 + 16 + \dots + 2048 \gg$

ou encore : $S(2048) = S(4) + \sum_{k=2}^{10} S(2^k) + \sum_{k=3}^{11} 2^k$ (au fait, j'oubliais : $8 = 2^3$ et $2048 = 2^{11}$)

Plus généralement : $S(2^{n+1}) = S(4) + \sum_{k=2}^n S(2^k) + \sum_{k=3}^{n+1} 2^k$. (F_3)

C'est grâce à (F_3) que nous allons calculer $S(2^n)$ désormais.

2. Rappeler la formule donnant la somme partielle d'une suite géométrique.

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$ (F_4)

3. Vérifier la formule (F_4) par récurrence.

4. Quelle est la dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$?

Expliquer pourquoi la dérivée de la fonction $x \mapsto \sum_{k=0}^n x^k$ vaut $\sum_{k=1}^n kx^{k-1}$.

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k2^{k-1} = (n - 1)2^n + 1$. (F_5)

(On rappelle que $2^{n+1} = 2^n \cdot 2$)

5. Vérifier la formule (F_5) par récurrence.

6. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n-1} k2^{k+1}$ en fonction de n , pour $n \geq 2$.

7. Montrer que $\sum_{k=2}^n S(2^k) = \sum_{k=2}^n (k-1)2^k = (n-2)2^{n+1} + 4$.

(A partir du résultat de la question précédente, on fera un changement d'indice de sorte que $k-1$ devienne k .)

8. Calculer la valeur de $8 + 16 + \dots + 2^{n+1} = \sum_{k=3}^{n+1} 2^k$ en fonction de n , pour $n \geq 2$.

9. Calculer $S(2^{n+1})$ à l'aide de (F_3) et vérifier la cohérence du résultat. (on utilise les deux questions précédentes)

Deuxième partie : Cas général

Revenons à nos moutons. Il ne sort pas que des 2, mais aussi des 4.

Admettons que sur quatre fois, il sort un 4 et trois 2.

Chaque fois qu'il est sorti un 4, on a marqué 4 points de moins.

Pour avoir un score plus précis, il nous faut donc compter le nombre N de coups joués pour faire 2^n (en supposant qu'il ne sorte que des 2); puis enlever 4 points une fois sur quatre.

On enlèvera donc un point pour chaque coup joué.

Pour faire 2^{n+1} , on joue un coup après avoir fait deux 2^n . Donc $N(2^{n+1}) = 2.N(2^n) + 1$. (F_6)

$N(4) = 1$. (On a joué une fois pour faire $4 = 2+2$.)

10. A l'aide de (F_6) , montrer par récurrence que $N(2^n) = 2^{n-1} - 1$; pour $n \geq 2$. (on trouve cette formule dans « 2048 wikipedia » notamment)

Conclure quant à une valeur plus précise de $S(2^n)$.

Il n'y a plus qu'à rejouer au 2048 pour confronter ce résultat à la réalité.

En fait, je pense qu'il sort un peu moins de 4 que une fois sur 4; peut-être une fois sur 8, va savoir.

En jouant, grâce au score affiché, on peut en déduire le pourcentage de 4. yapuka