

Concours blanc - 2ième semestre

Le but de ce problème est de trouver la valeur de toutes les séries $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2p}}$ où p est un entier strictement positif.

- Dans la partie 1, on utilise les endomorphismes pour construire un polynôme particulier utile pour la suite.
- Dans la partie 2, on étudie le polynôme $B_n(X)$ défini dans la partie 1.
- A partir de la question 2.3, on n'utilise plus la partie 1.
- Dans la partie 3, on utilise les séries de Fourier pour exprimer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2p}}$ en fonction de $B_{2p}(0)$.
- Le but des parties suivantes est de trouver une façon relativement rapide de calculer les $B_{2p}(0)$.
- Les parties 4 et 5 sont indépendantes de ce qui précède.
- Le but des parties 4 et 5 est de prouver la formule $\sum_{k=2}^{+\infty} \binom{n+1}{k} a_k = \frac{n-1}{2}$, utile pour la dernière partie.
- Dans la partie 6, on utilise les résultats des parties 2 à 5 pour trouver les $B_{2p}(0)$, et donc tous les $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2p}}$.

Première partie

Algèbre

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on définit le polynôme $T(P)$ par : $T(P)(X) = P(X + 2\pi) - P(X)$.

$P(X + 2\pi)$ est obtenu en remplaçant tous les X figurant dans $P(X)$ par $X + 2\pi$;

par exemple, si $P(X) = X^2 + 2$, alors $P(X + 2\pi) = (X + 2\pi)^2 + 2 = X^2 + 4\pi X + 4\pi^2 + 2$,

et donc $T(P)(X) = X^2 + 4\pi X + 4\pi^2 + 2 - (X^2 + 2) = 4\pi X + 4\pi^2$.

autre exemple, si $P(X) = 1$, alors $P(X + 2\pi) = 1$, et donc $T(P)(X) = 1 - 1 = 0$.

1.1 (2 pts) Montrer que T est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

1.2 (3 pts) On appelle T_2 la restriction de T à $\mathbb{R}_2[X]$

($\mathbb{R}_2[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2)

$$\text{Ainsi, } T_2 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) \end{array} \right. \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longmapsto \end{array} \begin{array}{l} \mathbb{R}_2[X] \\ T_2(P)(X) = P(X + 2\pi) - P(X) \end{array} .$$

T_2 est bien sûr un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Calculer $T_2(X^2)$.

On appelle $\mathcal{B} = (1; X; X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Quelles sont les coordonnées de $T_2(X^2)$ dans \mathcal{B} ?

Quelle est la matrice de T_2 dans \mathcal{B} ?

1.3 (2 pts) On appelle T_n la restriction de T à $\mathbb{R}_n[X]$

($\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n)

$$\text{Ainsi, } T_n \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) \end{array} \right. \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longmapsto \end{array} \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \\ T_n(P)(X) = P(X + 2\pi) - P(X) \end{array} .$$

T_n est bien sûr un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

On définit les polynômes A_k de $\mathbb{R}_n[X]$ comme suit :

$$A_0(X) = 1; A_1(X) = X; A_2(X) = X(X - 2\pi); A_3(X) = X(X - 2\pi)(X - 4\pi); \dots$$

$$A_n(X) = X(X - 2\pi)(X - 4\pi)\dots(X - (n - 1)2\pi) .$$

Montrer que $\mathcal{B}' = (A_0; A_1; \dots; A_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

1.4 (2 pts) Quelle est la matrice passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' lorsque $n = 3$?

1.5 (2 pts) Montrer que pour tout $0 < k \leq n$, $T_n(A_k) = k2\pi A_{k-1}$.

1.6 (1 +1 +1) En déduire la matrice de T_n dans la base \mathcal{B}' ; ainsi que le noyau et l'image de T_n .

1.7 (1 pt) Quelles sont les valeurs propres de T_n ?

1.8 (2 pts) Soit $Q = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ $\in \mathbb{R}_n[X]$. Quels sont les antécédents de Q par T_n ?

C'est à dire, quels sont les polynômes $P(X)$ tels que $T_n(P) = Q$? On exprimera P dans la base \mathcal{B}' .

1.9 (2 pts) Montrer qu'il existe un unique polynôme P tel que $\begin{cases} T(P)(X) = Q(X) \\ \int_0^{2\pi} P(t)dt = 0 \end{cases}$.

Deuxième partie

Calcul sur les polynômes

On appelle $R_n(X)$ le polynôme $R_n(X) = nX^{n-1}$

2.1 (1 pt) Montrer que les coordonnées de R_n dans la base \mathcal{B}' sont de la forme $\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$.

2.2 (0.5 pt) En déduire l'existence d'un unique polynôme $B_n(X)$ tel que $\begin{cases} T(B_n) = R_n \\ \int_0^{2\pi} B_n(t)dt = 0 \end{cases}$.

2.3 (1 pt) Vérifier que B_n est de degré n .

Si vous êtes perdus, vous pouvez repartir de là en utilisant les résultats :

B_n est l'unique polynôme tel que $\begin{cases} B_n(X + 2\pi) - B_n(X) = nX^{n-1} \\ \int_0^{2\pi} B_n(t)dt = 0 \end{cases}$.

De plus, $\deg(B_n) = n$.

Ainsi, par exemple, $B_1(X)$ est de degré 1 et vérifie : $B_1(X + 2\pi) - B_1(X) = 1X^0 = 1$ et $\int_0^{2\pi} B_1(t)dt = 0$.

2.4 (2+3 pts) Calculer $B_1(X)$ et montrer que $B_2(X) = \frac{X^2}{2\pi} - X + \frac{\pi}{3}$.

Indication : C'est facile si on utilise les 3 résultats de la ligne précédente :

B_1 est de degré 1 donc $B_1(X) = aX + b \dots$

2.5 (1 pt) Montrer que pour tout $n > 1$, $B_n(2\pi) = B_n(0)$.

2.6 (3 pts) Montrer que pour tout $n > 1$, $B'_n(X) = nB_{n-1}(X)$ où B'_n désigne la dérivée de B_n .

Indication : B_{n-1} est l'unique polynôme vérifiant $\begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases}$. Montrer que $\frac{B'_n}{n}$ vérifie les mêmes conditions.

2.7 (3 pts) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $B_n(X) = (-1)^n B_n(2\pi - X)$.

Indication : On utilise le même genre de raisonnement qu'à la question précédente.

2.8 (2+1 pts) En déduire que :

Si n est impair, et $n > 1$, alors $B_n(2\pi) = B_n(0) = 0$.

et que :

Si n est impair et $n \geq 1$, alors $B_n(\pi) = 0$.

2.9 (1.5+3 pts) Grâce à tous ces résultats, on peut calculer rapidement B_3 et B_4 . Et bien faites le!

Indication : On peut commencer par $B_3'(X) = 3B_2(X)$; On intègre pour trouver B_3 .

On trouve ensuite la constante d'intégration grâce à $B_n(0)$.

Troisième partie

Fourier

F_n désigne la fonction de période 2π égale à B_n sur $]0; 2\pi]$.

3.1 Développer en séries de Fourier la fonction F_1 . (Elle est de période 2π et égale à $\frac{1}{2\pi}x - \frac{1}{2}$ sur $]0; 2\pi]$)

(1 pt pour les a_n ; 2 pts pour les b_n ; 0.5 pt pour la série de Fourier)

3.2 (2+2 pts) On veut développer en séries de Fourier tous les F_n .

On appelle $v_{n,k}$ et $w_{n,k}$ les coefficients de F_n .

Ainsi, $v_{n,0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B_n(t) dt$; $v_{n,k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} B_n(t) \cos(kt) dt$

et $w_{n,k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} B_n(t) \sin(kt) dt$

et $F_n(x) = v_{n,0} + \sum_{k=1}^{+\infty} v_{n,k} \cos(kx) + \sum_{k=1}^{+\infty} w_{n,k} \sin(kx)$

Montrer que pour tout $k \geq 1$, $v_{n,k} = -\frac{n}{k} w_{n-1,k}$ et $w_{n,k} = \frac{n}{k} v_{n-1,k}$

Indication : On fera des intégrations par parties en utilisant les résultats de la partie 2 concernant les B_n .

3.3 Montrer que
$$\begin{cases} v_{2p+1,k} = 0 \text{ et } w_{2p+1,k} = \frac{(-1)^{p+1}(2p+1)!}{k^{2p+1}\pi} \\ v_{2p+2,k} = \frac{(-1)^{p+2}(2p+2)!}{k^{2p+2}\pi} \text{ et } w_{2p+2,k} = 0 \end{cases} \quad \text{pour tout } p \geq 0$$

(beaucoup de points) Indication : On peut faire une récurrence sur p en utilisant ce qui précède.

3.4 (1 pt) Donner le développement en séries de Fourier de F_n en distinguant les cas n pair et n impair.

3.5 (2+2 pts) En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ et de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$.

Indication : On applique le théorème de Dirichlet à F_2 et F_4 . ($p=1$ et $p=2$)

On aura pris soin d'énoncer le théorème de Dirichlet.

3.6 (2 pts) Montrer que
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2p}} = \frac{(-1)^{p+1} B_{2p}(0) \pi}{(2p)!}.$$

Quatrième partie

Continuité, Equations différentielles

4.1 (2 pts) On définit la fonction numérique $f_{a,b}(x) = \frac{ae^x+b}{x}$ quand $x \neq 0$ et $f_{a,b}(0) = 1$.

Trouver a et b pour que $f_{a,b}$ soit continue sur \mathbb{R} .

4.2 (2 pts) Développer en séries entières la fonction $f_{1,-1}(x) = \frac{e^x-1}{x}$ quand $x \neq 0$ et $f_{1,-1}(0) = 1$.

Dans la suite, on notera f cette fonction. Déduire de ce qui précède que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

4.3 (1 pt) On considère l'équation différentielle (E) : $xy''(x) + (2-x)y'(x) - y = 0$.

Vérifier que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est solution de (E) sur \mathbb{R}^* .

4.4 (3 pts) En utilisant le développement en séries entières de f trouvé en 4.2, montrer que f est une solution de (E) sur \mathbb{R} .

4.5 (2 pts) En déduire toutes les solutions de (E) sur \mathbb{R}^* .

4.6 (1 pt) Trouver toutes les solutions de (E) sur \mathbb{R} .

Cinquième partie

Etude de fonctions, développement limités

5.1 $g(x) = \frac{1}{f(x)} = \begin{cases} \frac{x}{e^x-1} & \text{quand } x \neq 0 \\ 1 & \text{quand } x = 0 \end{cases}$. Montrer que g est de classe C^1 sur \mathbb{R} et donner $g'(0)$.

(0.5 +1 pour la continuité ; 2 pour la dérivabilité et 2 pour la continuité de f')

5.2 (2 pts) Montrer que pour tout x réel, $g'(x) < 0$.

5.3 (1+3 pts) Chercher les asymptotes en $\pm\infty$.

5.4 (2 pts) Donner le tableau de variations de g ainsi que sa représentation graphique.

5.5 (0.5 pt) $h(x) = g(x) + \frac{x}{2}$. Expliquer pourquoi h admet un développement limité à tous ordres en 0.

5.6 (1.5+0.5 pts) Montrer que h est paire.

En déduire que si l'on note $\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} x^k + o(x^k)$ le développement limité de h en 0 à l'ordre n , et si k est impair, alors $a_k = 0$.

5.7 (3 pts) Donner le développement limité de h à l'ordre 5 en 0.

Indication : Vous vous rappelez comment on fait une division ? Allez, essayez de faire celle là sans vous tromper, ça va rapporter gros.

5.8 (1.5 pts) A l'aide de la formule de Taylor, montrer que :

Pour tout $k \geq 2$, $a_k = h^{(k)}(0) = g^{(k)}(0)$.

5.9 (3+0.5 pts) En dérivant $n+1$ fois la relation " $x = g(x)(e^x - 1)$ " grâce à la formule de Leibnitz,

montrer que $1 - \frac{1}{2}(n+1) + \sum_{k=2}^n \binom{n+1}{k} g^{(k)}(0) = 0$.

En déduire que pour tout $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^n \binom{n+1}{k} a_k = \frac{n-1}{2}$.

Sixième partie

Calcul des $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2p}}$ à l'aide du DL de h.

Le polynôme B_n défini dans la partie 2 s'écrit : $B_n(X) = \sum_{s=0}^n b_{s,n} \frac{X^s}{s!}$.

6.1 (2 pts) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $b_{s+1,n} = nb_{s,n-1}$ et donc (A) : $b_{s,n} = nb_{s-1,n-1}$

Indication : Il y a une relation entre B'_n et $B_{n-1} = \sum_{s=0}^{n-1} b_{s,n-1} \frac{X^s}{s!}$

6.2 (2 pts) Montrer que $b_{0,n} = -\sum_{s=1}^n b_{s,n} \frac{(2\pi)^s}{(s+1)!}$. Indication : $\int_0^{2\pi} B_n(t) dt = 0$.

6.3 Grâce à la formule A, montrer que si $s < n$ (et $n \geq 2$), alors $b_{s,n} = \frac{n!}{(n-s)!} b_{0,n-s}$

et que si $s = n$, alors $b_{n,n} = n! b_{1,1}$.

Que vaut $b_{1,1}$? (Indication : avez vous trouvé B_1 ?) (1+1+0.5+2 pts)

En déduire que $b_{0,n} = -\frac{1}{n+1} \left(\sum_{s=2}^n \binom{n+1}{s} b_{0,n-s+1} (2\pi)^{s-1} + (2\pi)^{n-1} \right)$

6.4 (2+2 pts) En déduire que $\sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} b_{0,k} (2\pi)^{n-k} + (2\pi)^{n-1} = 0$

Indication : changement d'indexation $s = n+1-k$.

Montrer que $\sum_{k=2}^n \binom{n+1}{k} \frac{b_{0,k}}{(2\pi)^k} = \frac{n-1}{4\pi}$

6.5 (3 pts) En déduire que $\forall k \geq 2$, $a_k = \frac{b_{0,k}}{(2\pi)^{k-1}}$ (on fera un récurrence en utilisant 6.4 et 5.9)

6.6 (1 pt) Exprimer $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2p}}$ en fonction des a_{2p} (indication : on peut utiliser 3.6)

Ainsi, en effectuant le développement limité de h, on peut trouver tous les $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2p}}$.