

Concours Blanc 1

Exo 1. Equa diff 1 Calculer $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ grâce à un changement de variable.

Calculer $\int \arctan(x) dx$ grâce à une intégration par partie.

Intégrer l'équation différentielle suivante : $xy' + 3y = \frac{\arctan(x)}{x^2}$

Exo 2. Donner les solutions du système suivant en discutant selon les valeurs du paramètre a.

Les inconnues sont x ; y et z.

$$\begin{cases} (a-1)x + (a+1)y + (a-2)z = a \\ + 2y - z = 1 \\ ax + 2y + (a-1)z = 3 \end{cases}$$

Exo 3. Etude des intégrales de Wallis On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx .$$

Calculer I_0 et I_1 .

Montrer que pour tout entier naturel n, on a $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

Indication : Dans I_{n+2} , on fait une intégration par partie en écrivant : $\sin^{n+2}(x) = \sin^{n+1}(x) \cdot \sin(x)$

(On se rappelle que $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$)

Montrer que pour tout entier naturel p : $I_{2p} = \frac{(2p)!}{(p!)^2} \frac{\pi}{2^{2p+1}}$. (On rappelle que par convention : $0! = 1$)

Indication : on fait une récurrence en utilisant le résultat de la question précédente.

Exo 4. (FIP ; INSA de Strasbourg 2018) m est un paramètre réel.

On considère le nombre complexe z_m défini par : $z_m = \frac{-\frac{1}{2} + m + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2} - m + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

41. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de z_m .

42. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la partie réelle de z_m est nulle.

Calculer le module et un argument de z_m pour chacune des valeurs de m obtenue.

43. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(z+i)^3 = \frac{1}{\sqrt{3}} z_{-1}$ où z_{-1} désigne la valeur de z_m pour $m = -1$.

Problème

Partie I : Etude de la fonction $x \rightarrow f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

1. Donner l'ensemble de définition de f
2. f est-elle paire, impaire, périodique? Qu'en déduit-on pour la représentation graphique de f ?
3. Etudier la dérivabilité de f . Trouver les endroits où la dérivée de f s'annule.
4. Donner le tableau de variation de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
5. Quelle est l'équation de la tangente en $x_0 = 1$? En $x_0 = 2$?
6. Y a-t-il une asymptote quand $x \rightarrow 0^+$?
7. Y a-t-il une asymptote quand $x \rightarrow +\infty$? Quelle est la position de la courbe par rapport à l'asymptote?
8. Représenter f sur \mathbb{R}^* .

Partie II : Etude de la fonction $x \rightarrow g(x) = \frac{5x+4}{x(x-1)}$

9. Donner l'ensemble de définition de g
10. g est-elle paire, impaire, périodique? Qu'en déduit-on pour la représentation graphique de g ?
11. Etudier la dérivabilité de g . Trouver les endroits où la dérivée de g s'annule.
12. Donner le tableau de variation de g sur \mathbb{R} .
13. Quelle est l'équation de la tangente en $x_0 = -2$? En $x_0 = 2$?
14. Y a-t-il une asymptote quand $x \rightarrow 0$? Quand $x \rightarrow 1$?
15. Y a-t-il une asymptote quand $x \rightarrow -\infty$? Quand $x \rightarrow +\infty$?
16. Représenter g sur \mathbb{R} .

Indication : On trouve $g'(x) = \frac{-5x^2-8x+4}{(x^2-x)^2}$. $12^2 = 144$

Partie III : Etude de l'arc paramétré $\begin{cases} x(t) = \frac{t^2+1}{t} \\ y(t) = \frac{5t+4}{t(t-1)} \end{cases}$

17. Ensemble de définition de l'arc.
18. Parité et périodicité. Réduction de l'intervalle d'étude.
19. Tableau de variation
20. Etude des asymptotes en $\pm\infty$; en $t_0 = 1$.
21. Etude de l'asymptote en $t_0 = 0$. On ne demande pas la position de la courbe par rapport à son asymptote.
22. Pente en -2 ; -1 et $2/5$.
23. Pente en $t_0 = 2$. Equation de la tangente en $t_0 = 2$.
24. Représentation graphique.