

## Contrôle 2

**Exo 1.** Dans cet exercice,  $i$  désigne le nombre complexe tel que  $i^2 = -1$ .

L'application  $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{2i\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{z-1+i}{z-2i} \end{array} \right.$  est-elle injective, surjective, bijective ?

Que doit-on changer pour que  $f$  devienne bijective ?

**Exo 2. ( FIP ; INSA de Strasbourg 2018 )**

On considère l'équation différentielle (E) :  $y'' - 2y' + y = x^2 - 4x + 1$

21. Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle (e) :  $y'' - 2y' + y = 0$

22. Déterminer  $a$ ,  $b$  et  $c$  pour que la fonction polynôme  $p$  définie par  $p(x) = ax^2 + bx + c$  soit une solution particulière de l'équation (E).

23. Résoudre (E).

24. Déterminer la solution  $f$  de (E) qui vérifie  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = 0$ .

**Exo 3. ( FIP ; INSA de Strasbourg 2018 )**

Intégrer l'équation différentielle  $xy' - 2y = \ln(x)$ .

Trouver la solution telle que  $f(1) = 0$ .

**Exo 4.** Intégrer dans  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $y'' + 4y' + 13y = 13x - 9 + 9e^{-2x}$ .

Trouver la solution telle que  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 2$ .

**Exo 5.** Donner l'ensemble de définition de la fonction  $\text{Ln}(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$

**Exo 6.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\sin(3x) = \cos(x + \frac{\pi}{3})$ .

**Exo 7.** Intégrer l'équation différentielle  $y' + 3y = \cos(2x)$

**Exo 8.** L'application  $f(x) = x^2$  qui va de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  est-elle injective ? surjective ?

**Exo 9.** Un exo où il faut réfléchir un peu. La fonction  $f$  va de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Montrer que si  $f$  s'annule en  $0$ , alors la composée  $f \circ f$  s'annule aussi en  $0$ .

## Problème :

On rappelle que  $e = \exp(1) = e^1 \approx 2.72$  ;  $\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.61$  ;  $\sqrt{2} \approx 1.41$  et  $\ln(3) \approx 1.10$  .

### 1. Etude d'une fonction.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}$  ,  $f(x) = 3x \exp(-x^2) - 1 = 3xe^{-x^2} - 1$  .

11. Quelle est la dérivée de  $e^{-x^2}$  ?

12. Calculer  $f'(x)$ . Factoriser  $f'$ .

13. Vérifier que  $f'$  ne s'annule qu'en  $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  .

14. Donner le signe de  $f'$ .

Dresser le tableau de variation de  $f$ .

15. On rappelle que  $\lim_{\pm\infty} x^n e^{-x^2} = 0$  .

On appelle ça le théorème des croissances comparées.

Donner les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

16. Représenter  $f$ .

### 2. Etude d'une équation différentielle.

$n$  est un entier naturel non nul. Soit  $E_n$  l'équation différentielle  $xy' - (n - 2x^2)y = n - 2x^2$  .

21. Résoudre l'équation homogène associée.

( indications :  $\frac{n-2x^2}{x} = \frac{n}{x} - 2x$        $e^{a+b} = e^a e^b$        $a \ln(b) = \ln(b^a)$  )

22. Trouver une solution particulière constante.

23. En déduire toutes les solutions de  $E_n$  .

### 3. Etude de deux suites.

On suppose désormais que l'entier naturel  $n$  est supérieur ou égal à 2 .

Soit  $g_n(x) = 3x^n e^{-x^2} - 1 = 3x^n \exp(-x^2) - 1$  .

31. Quel est le signe de  $g_n(0)$  et  $g_n(1)$  ?

**32.** Montrer que  $g'_n(x) = (3nx^{n-1}e^{-x^2} - 6x^{n+1}e^{-x^2})$ .

Factoriser  $g'_n$  et vérifier que  $g'_n$  ne s'annule qu'en  $\pm\sqrt{\frac{n}{2}}$  et en 0.

**33.** Etudier les variations de  $g_n$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

Donner la limite de  $g_n(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

En déduire que  $g_n$  s'annule sur  $\mathbb{R}^+$  en deux réels notés  $u_n$  et  $v_n$ , tels que  $u_n < 1 < v_n$ .

**34.** Quelle est la limite en  $+\infty$  de la suite  $(v_n)_{n \geq 2}$ ?

**35.** Exprimer  $\exp(-u_n^2) = e^{-u_n^2}$  en fonction de  $(u_n)^n$ . ( On utilise le fait que  $g_n(u_n) = 0$  )

En déduire que  $g_{n+1}(u_n) < 0$ .

**36.** Dresser le tableau de variation de  $g_{n+1}$  sur  $[0;1]$ .

En déduire que la suite  $(u_n)_{n > 1}$  est croissante.

**37.** On sait que toute suite croissante et majorée converge.

Déduire de ce qui précède que la suite  $(u_n)_{n > 1}$  est convergente. On appelle  $l$  sa limite.

**38.**  $h_n$  est définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $\forall x > 0$ ,  $h_n(x) = \ln(3) + n \ln(x) - x^2$ .

Soit  $x > 0$ . Montrer que  $g_n(x) = 0$  si et seulement si  $h_n(x) = 0$ .

**39.** On suppose que  $l \neq 1$ .

Trouver une contradiction en utilisant ce qui précède. Conclusion?