

Consignes 3

Calcul: $\sqrt{x^2+4x+4} > 2x-2$

Soit $\mathcal{Q}(x) = x^2 + 4x + 4$ $\Delta = 16 - 16 = 0$

Donc \mathcal{Q} n'a pas de racine. Elle change pas de signe. $\mathcal{Q}(0) = 4$, donc $\mathcal{Q}(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

L'inéquation est donc définie pour tous les x .

On résout d'abord l'équation $\sqrt{x^2+4x+4} = 2x-2$ (E).

(E) $\rightarrow x^2 + 4x + 4 = (2x-2)^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 4x^2 - 8x + 4 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0$

Il y a deux solutions a priori: 0 et 4.

On vérifie: pour $x=0$: $\sqrt{4} = 2 \neq -2$

pour $x=4$: $\sqrt{72+24+4} = \sqrt{100} = 10$ et $2 \cdot 4 - 2 = 8 - 2 = 6 \neq 10$ Ok

On pose $f(x) = 2x - 2 - \sqrt{x^2 + 4x + 4}$.

f s'annule en 4

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

$f(0) = -2 - \sqrt{4} = -2 - 2 = -4 < 0$ et $f(4) = 8 - 2 - \sqrt{100} = 6 - 10 = -4 < 0$

On veut $f(x) < 0$, donc $S =]-\infty, 4[$

Equa diff 1: $xy' - 2y = \frac{x^2}{\ln x}$ - Hint: $y_H = Ae^{\int \frac{1}{x} dx} = Ae^{\ln x} = Ax$

Sol particulière: M.V.C. $y_2(x) = A(x)x^2$ $y_2'(x) = A(2x)x^2 + A(x)2x$

$xy_2' - 2y_2 = A(x^3 + 2x^3) - 2A(x)x^2 = \frac{x^2}{\ln x} \Rightarrow A(x) = \frac{x^2}{x^3 \ln x} = \frac{1}{x \ln x}$

$A(x) = \int \frac{1}{x \ln x} dx$ chgt de variable $X = \ln x$ $\frac{dX}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x dX$

$= \int \frac{1}{x} x dX = \int \frac{dX}{X} = \ln|X| = \ln|\ln x| \Rightarrow y_2(x) = x^2 \ln|\ln x|$

Sols de l'éq complète: $y = Ax^2 + x^2 \ln|\ln x|$ où $A \in \mathbb{R}$

Equa diff 2: $y'' + 2y' + 5y = (-13x + 33)e^{2x}$ $f(0) = 3$ et $f'(0) = 7$

Pol: $P(x) = x^2 + 2x + 5$ $\Delta = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$

il y a deux racines: $\frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$

donc $y_H = e^{-x}(A \cos(2x) + B \sin(2x))$ où $A, B \in \mathbb{R}$

Sol partic: $y_p = (ax + b)e^{2x}$

$y_p' = (a + 2ax + 2b)e^{2x}$ $y_p'' = (2a + 2a + 4ax + 4b)e^{2x} = (4ax + 4a + 4b)e^{2x}$

$y_p'' + 2y_p' + 5y_p = (4ax + 4a + 4b + 2a + 4ax + 4b + 5ax + 5b)e^{2x}$
 $= (13ax + 6a + 13b)e^{2x} = -13x + 33$

$\Rightarrow \begin{cases} 13a = -13 \Leftrightarrow a = -1 \\ 6a + 13b = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ 13b = 33 + 6 = 39 \end{cases}$

$y_p = (-x + 3)e^{2x}$

Sols de l'Eq complète: $y = e^{-x}(A \cos(2x) + B \sin(2x)) + (-x + 3)e^{2x}$ où $A, B \in \mathbb{R}$

La sol telle que $f(0) = 3$ et $f'(0) = 7$:

$f(0) = A + 3 = 3 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow f(x) = B \sin(x)e^{-x} + (-x + 3)e^{2x}$

$f'(x) = 2B \cos(x)e^{-x} - B \sin(x)e^{-x} - e^{2x} + (6 - 2x)e^{2x}$

$f'(0) = 2B - 1 + 6 = 7 \Rightarrow 2B = 7 - 6 + 1 = 2 \Rightarrow B = 1$

$f(x) = \sin(x)e^{-x} + (-x + 3)e^{2x}$

Limites et développements limités

① $f(x) = e^{\cos x}$ chgt $X = x - \frac{\pi}{3}$ (qd $x \rightarrow \frac{\pi}{3}$, $X \rightarrow 0$)

$$f(x) = e^{\cos(x - \frac{\pi}{3})} = e^{\cos(\frac{\pi}{3}) \cos X - \sin(\frac{\pi}{3}) \sin X}$$

$$= e^{\frac{1}{2} \cos X - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin X} = e^{\frac{1}{2}(1 - \frac{X^2}{2} + o(X^2)) - \frac{\sqrt{3}}{2} X + o(X^2)}$$

$$= e^{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} X - \frac{1}{4} X^2 + o(X^2)}$$

$$= e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} X - \frac{1}{4} X^2 + o(X^2)} = e^{\frac{1}{2}} \left[1 + (-\frac{\sqrt{3}}{2} X - \frac{1}{4} X^2 + o(X^2)) + \frac{1}{2} (-\frac{\sqrt{3}}{2} X - \frac{1}{4} X^2 + o(X^2))^2 + o(X^2) \right]$$

$$= e^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{\sqrt{3}}{2} X - \frac{1}{4} X^2 + \frac{3}{8} X^2 + o(X^2) \right] = e^{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{1}{2}} X + \frac{1}{8} e^{\frac{1}{2}} X^2 + o(X^2)$$

$$e^{\cos x} = e^{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{1}{2}} X + \frac{1}{8} e^{\frac{1}{2}} X^2 + o(X^2)$$

$$\boxed{e^{\cos x} = e^{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{1}{2}} (x - \frac{\pi}{3}) + \frac{1}{8} e^{\frac{1}{2}} (x - \frac{\pi}{3})^2 + o((x - \frac{\pi}{3})^2)}$$

La tangente à $x = \frac{\pi}{3}$: $y = e^{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{1}{2}} (x - \frac{\pi}{3})$

La courbe est au dessus car $\frac{1}{8} e^{\frac{1}{2}} (x - \frac{\pi}{3})^2 > 0$

② $(1+t)^{-3} = 1 - 3t + \frac{-3(-4)}{2} t^2 + \frac{-3(-4)(-5)}{6} t^3 + o(t^3)$

$$= 1 - 3t + 6t^2 - 10t^3 + o(t^3)$$

$$\boxed{(1+2x)^{-3} = 1 - 6x + 12x^2 - 80x^3 + o(x^3)}$$

tangente en 0 : $y = 1 - 6x$

La courbe est au dessus car $12x^2 > 0$

③ $e^x + x^3 \sim e^x$ car $\frac{e^x + x^3}{e^x} = 1 + \frac{x^3}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 + 0 = 1$

↑ TCC (T de comparaison de croissances)

$x^2 + 2 \sim x^2$ car $\frac{x^2 + 2}{x^2} = 1 + \frac{2}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 + 0 = 1$

Donc $\frac{e^x + x^3}{x^2 + 2} \sim \frac{e^x}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ (TCC)

$e^x + x^3 \sim 1 + 0 = 1$
 $x^2 + 2 \sim 0 + 2 = 2$
 donc $f(x) \sim \frac{1}{2}$

④ $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ chgt $X = x - 2 \Rightarrow x = X + 2$

$$g(x) = \sqrt{(X+2)^2 - 3(X+2) + 2} = \sqrt{X^2 + 4X + 4 - 3X - 6 + 2} = \sqrt{X^2 + X} \underset{X \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{X} = \sqrt{x-2}$$

donc $\boxed{\sqrt{x^2 - 3x + 2} \underset{x \rightarrow 2}{\sim} \sqrt{x-2}}$

Les complexes

① • $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$

$|z_1| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\Rightarrow z_1 = 2 \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{-i\pi/3}$

$z_1 = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\pi/3}$ (module 2, argument $-\frac{\pi}{3}$)

• $z_2 = 1 + i$ $|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$z_2 = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ (module $\sqrt{2}$, argument $\frac{\pi}{4}$)

• $z_1 \times z_2 = 2e^{-i\pi/3} \cdot \sqrt{2}e^{i\pi/4} = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3})} = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/12}$ (module $2\sqrt{2}$, argument $-\frac{\pi}{12}$)

• $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{-i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3} - i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$ (module $\sqrt{2}$, argument $-\frac{7\pi}{12}$)

• $z_1^{2020} = 2^{2020} e^{-i\pi \frac{2020}{3}} = Z$

$\frac{2020}{3} = 673 \text{ avec } 2020 = 3 \cdot 673 + 1$

$Z = 2^{2020} e^{-i\pi 673 - i\frac{\pi}{3}} = 2^{2020} e^{i\pi - i\frac{\pi}{3}}$

car $e^{i2\pi} = e^{i0} = 1$

$= 2^{2020} e^{i\frac{2\pi - \pi}{3}} = 2^{2020} e^{i\frac{2\pi}{3}}$

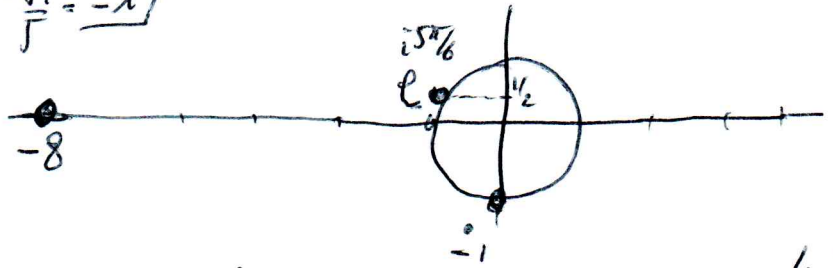
argument $\frac{2\pi}{3}$

② • $(1-i)(2+i) = 2+i-2i-1 = 1-i$

$\frac{1-i}{2+i} = \frac{(1-i)(2-i)}{4+1} = \frac{2-i-2i-1}{5} = \frac{-1-3i}{5} = -\frac{1}{5} - \frac{3i}{5}$

$(1-i\sqrt{3})^3 = (2e^{-i\pi/3})^3 = 2^3 e^{-i\pi} = -8$

$e^{i5\pi/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$



$1 - 3i$

③ $i = e^{i\pi/2}$ a 3 racines cubiques: $z_k = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})}$ où $k=0, 1, 2$

$z_0 = e^{i\pi/6}$, $z_1 = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})} = e^{i5\pi/6}$

$z_2 = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3})} = e^{i3\pi/2} = e^{-i\pi/2} = -i$

$-8 = 2^3 e^{-i\pi}$ il y a 3 racines cubiques: $8^{1/3} e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3})} = a_k$

$a_0 = 8^{1/3} e^{i\pi/3} = 2e^{i\pi/3}$, $a_1 = 2e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3})} = 2e^{i\pi} = -2$

$a_2 = 2e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3})} = 2e^{i5\pi/3} = 2e^{-i\pi/3}$

Problème 1

(11) $y = ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \quad \left| g(x) = x^2 + \frac{b}{a}x \right|$

(12) $g(x) = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \quad \left| d = \frac{b}{2a} \right| \quad e = \left| \frac{b}{2a} \right|$

(13) $y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \right] + c = a(x+d)^2 + c - a \frac{b^2}{4a^2}$
 $y + \frac{b^2}{4a} - c = a(x+d)^2$

(14) Le chgt de repère est donc $\left| X = x + \frac{b}{2a} \right|$ et $\left| Y = y + \frac{b^2}{4a} - c \right|$

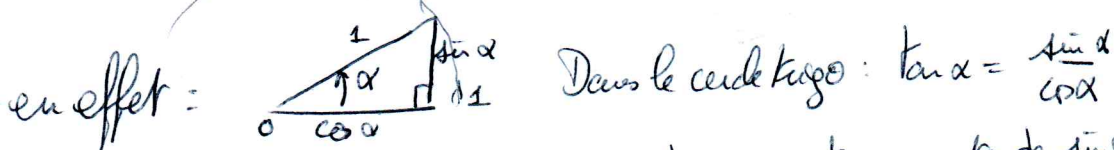
(21) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{a}} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{a}}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{a}}{2a\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{ax}}{2ax} = \frac{1}{2\sqrt{ax}}$

(22) $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$
 $f(x) = \sqrt{\frac{x_0}{a}} + \frac{\sqrt{ax_0}}{2ax_0} (x-x_0) + o(x-x_0)$

(23) L'éq de la tpe est donc: $Y = \frac{\sqrt{ax_0}}{2ax_0} (x-x_0) + \sqrt{\frac{x_0}{a}}$
 $Y = \frac{1}{2\sqrt{ax_0}} x - \frac{1}{2\sqrt{ax_0}} x_0 + \sqrt{\frac{x_0}{a}} = \frac{1}{2\sqrt{ax_0}} x - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x_0}{a}} + \sqrt{\frac{x_0}{a}}$

$\left| Y = \frac{1}{2\sqrt{ax_0}} x + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x_0}{a}} \right|$

(24) $\tan \alpha$ est la pente de la tangente. Donc $\left| \tan \alpha = f'(x_0) \right|$.



On avance de $\cos \alpha$ et on monte de $\sin \alpha$.

Un vecteur directeur de la tpe est $\vec{u} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, dont la pente vaut $\tan \alpha$

(25) La droite Δ_0 a pour eq: $Y = \tan(\alpha)X + b$

en x_0 : $f(x_0) = \sqrt{\frac{x_0}{a}} = \tan(\alpha)x_0 + b \Rightarrow b = \sqrt{\frac{x_0}{a}} - \tan(\alpha)x_0$

$\Delta_0: \left| Y = \tan(\alpha)(x-x_0) + \sqrt{\frac{x_0}{a}} \right|$

$$(26) \tan(2\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$$

$$\text{et } \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \tan(2\alpha)$$

$$(27) \tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \frac{1}{4ax_0}}{1 - \frac{1}{4ax_0}} = \frac{\frac{1}{2ax_0}}{\frac{4ax_0 - 1}{4ax_0}} = \frac{1}{2ax_0} \frac{4ax_0}{4ax_0 - 1} = \frac{2}{4ax_0 - 1}$$

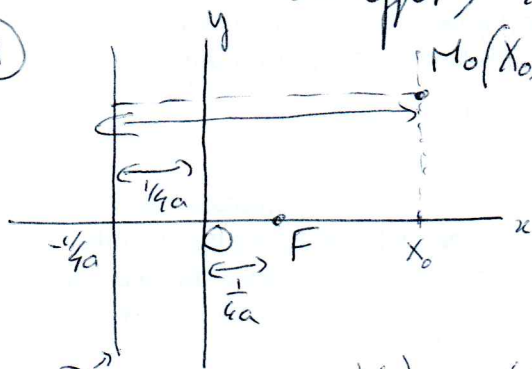
(28) Δ_0 coupe l'axe des abscisses qd $Y=0$, donc qd

$$0 = \tan(2\alpha)(X - X_0) + \sqrt{\frac{X_0}{a}} \Leftrightarrow X - X_0 = -\frac{\sqrt{\frac{X_0}{a}}}{\tan(2\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow X - X_0 = -\sqrt{\frac{X_0}{a}} \frac{4ax_0 - 1}{4\sqrt{ax_0}} = \frac{1 - 4ax_0}{4\sqrt{a}} = \frac{1}{4a} - X_0 \Leftrightarrow \boxed{X = \frac{1}{4a}}$$

En effet, X ne dépend pas de X_0 !

(31)



$$d(M_0, D) = X_0 + \frac{1}{4a}$$

$$(32) \vec{FM_0} = \begin{pmatrix} X_0 \\ \sqrt{\frac{X_0}{a}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{4a} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 - \frac{1}{4a} \\ \sqrt{\frac{X_0}{a}} \end{pmatrix}$$

$$d(M_0, F) = \|\vec{FM_0}\| = \sqrt{\left(X_0 - \frac{1}{4a}\right)^2 + \frac{X_0}{a}} = \sqrt{X_0^2 - \frac{X_0}{2a} + \frac{1}{16a^2} + \frac{X_0}{a}}$$

$$= \sqrt{X_0^2 + \frac{X_0}{2a} + \frac{1}{16a^2}} = \sqrt{\left(X_0 + \frac{1}{4a}\right)^2} = X_0 + \frac{1}{4a}$$

(33) $d(M_0, D) = d(M_0, F)$. Ainsi, partant de l'antenne, les ondes parcourent la distance $L + \frac{1}{4a}$ (toujours la même!) pour atteindre F !

Problème 2

(1) $\vec{AB} = B-A = (2, 0, -1)$ et $\vec{AC} = C-A = (0, 1, 1)$
 \vec{AB} et \vec{AC} ne sont pas colinéaires, donc les points A, B, C ne sont pas alignés.

Ils forment un plan.

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{ Donc } (ABC): x - 2y + 2z = d$$

en A: $d = x_A - 2y_A + 2z_A = 1 - 4 + 4 = 1$

$$(ABC): x - 2y + 2z = 1$$

(21) Un vecteur \perp à (\mathcal{R}_1) est $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Un vecteur \perp à (\mathcal{R}_2) est $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les plans (\mathcal{R}_1) et (\mathcal{R}_2) ne sont pas parallèles.

(22) Le plan (\mathcal{R}_1) contient A, B et C

$$x_C - 3y_C + 2z_C + 2 = 1 - 9 + 6 + 2 = 0. \quad C \in (\mathcal{R}_1).$$

Donc le point C est sur la droite (D)

(23) $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est \perp à \vec{a} et \vec{b} , donc $\vec{a} \wedge \vec{b} \in (\mathcal{R}_1) \cap (\mathcal{R}_2) = (D)$.

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{u}$$

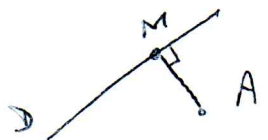
$$(D) \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 0t + 3 \\ z = -t + 3 \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

(25) $AM \perp \vec{u}$, donc $\vec{AM} \cdot \vec{u} = 0$. Si $M = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}$, $\vec{AM} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} x_M - 1 \\ y_M - 2 \\ z_M - 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

$$\Rightarrow 2(x_M - 1) - (z_M - 3) = 0. \quad M \in (D), \text{ donc } x_M = 2t_M + 1 \text{ et } z_M = -t_M + 3$$

$$2(2t_M) - (-t_M + 3 - 3) = 0 \Leftrightarrow 4t_M + t_M - 1 = 0 \Rightarrow t_M = \frac{1}{5}$$

$$\text{donc } M = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + 1 \\ 3 \\ -\frac{1}{5} + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ 3 \\ \frac{14}{5} \end{pmatrix}$$



$$d(M, D) = \|\vec{AM}\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{7}{5} - 1 \\ 3 - 2 \\ \frac{14}{5} - 3 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ 1 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{5} \sqrt{2^2 + 5^2 + 4^2} = \frac{1}{5} \sqrt{4 + 25 + 16} = \frac{1}{5} \sqrt{45} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$d(M, D) = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$