

Contrôle 2 Cours

Exo 1

$$f(z) = \frac{z-1+i}{z-2i}$$

On prend $z \in \mathbb{C}$. On cherche les auto-valeurs de f c'est-à-dire les z tels que $f(z) = z$

$$f(z) = z \Leftrightarrow \frac{z-1+i}{z-2i} = z \Leftrightarrow z-1+i = z(z-2i) \Leftrightarrow z-1+i = z^2 - 2iz$$

$$\Leftrightarrow z - z^2 = 1-i-2iz \Leftrightarrow z = \frac{1-i-2iz}{1-z}$$

Tous les z ont 1 auto-valeur, sauf $z=1$ qui n'en a pas.

Donc f est injective et n'est pas surjective

Si on enlève 1 à l'ensemble d'arrivée, alors f est bijective

Exo 2 [21] le polynôme caractéristique associé à $y'' - 2y' + y = 0$

est $P(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Il a une racine double 1,

donc $y_H = (Ax+B)e^x$ où $A, B \in \mathbb{R}$

$$[22] \quad p(x) = ax^2 + bx + c \quad p'(x) = 2ax + b \quad p''(x) = 2a$$

$$p''(x) - 2p'(x) + p(x) = 2a - 4ax - b + ax^2 + bx + c = ax^2 + (b-4a)x + 2a - b + c = x^2 - 4x + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b-4a=-4 \\ 2a-b+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4+4a=0 \\ c=1-2a+b=1-2=-1 \end{cases}$$

$$p(x) = x^2 - 1$$

[23] $y = (Ax+B)e^x + x^2 - 1$ où $A, B \in \mathbb{R}$

$$[24] \quad f(0) = 0 \Rightarrow B - 1 = 0 \Rightarrow B = 1$$

$$f'(x) = Ae^x + Ax e^x + 2x \quad f'(0) = A = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$f(x) = e^x + x^2 - 1$$

Exo 3 $xy' - 2y = \ln x$

MOM: $xy' - 2y = 0$

$y_H = Ae^{-\int \frac{2}{x} dx} = Ae^{2 \ln x} = Ax^2$

Sol partice: MVC $y_P = A(x) x^2$ $y'_P = A'(x) x^2 + A(x) 2x$

$xy'_P - 2y_P = A'(x) x^3 + A(x) 2x^2 - 2A(x) x^2 = \ln x$

$\Rightarrow A'(x) = \frac{\ln x}{x^3} \Rightarrow A(x) = \int \frac{\ln x}{x^3} dx = \int x^{-3} \ln x dx$

ILR $\begin{cases} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x^{-3} & v = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} = -\frac{x^{-2}}{2} = -\frac{1}{2x^2} \end{cases}$ $A(x) = \left[-\frac{\ln x}{2x^2} \right] + \int -\frac{1}{2x^3} dx$

$A(x) = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int x^{-3} dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4} x^{-2} \Rightarrow y_P(x) = -\frac{\ln x}{2} + \frac{1}{4}$

Sols de l'eq complete: $y = Ax^2 - \frac{\ln x}{2} - \frac{1}{4}$ ou $A \in \mathbb{R}$

La sol telle que f(1) = 0: $f(1) = A - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$

$f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2} - \frac{1}{4} = \frac{x^2 - 2 \ln(x) - 1}{4}$

Exo 4 $y'' + 4y' + 13y = 13x - 9 + 9e^{-2x}$

HA1: $x^2 + 4x + 13 = \ell(x)$ $\Delta = 16 - 52 = -36 = (6i)^2$

2 racines: $\frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i$

$y_H = e^{-2x} (A \cos(3x) + B \sin(3x))$ où $A, B \in \mathbb{R}$

Sol part pour $13x - 9$: $y_1 = ax + b$ $y_1' = a$ $y_1'' = 0$

$y_1'' + 4y_1' + 13y_1 = 4a + 13ax + 13b = 13ax + 4a + 13b = 13x - 9$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 4a + 13b = -9 \Rightarrow 13b = -13 \Rightarrow b = -1 \end{cases}$ $y_1 = x - 1$

Sol part pour $9e^{-2x}$: $y_2 = ae^{-2x}$ $y_2' = -2ae^{-2x}$ $y_2'' = 4ae^{-2x}$

$y_2'' + 4y_2' + 13y_2 = (4a - 8a + 13a)e^{-2x} = 9ae^{-2x} = 9e^{-2x} \rightarrow a = 1$
 $y_2 = e^{-2x}$

Sol de l'eq complète: $y = e^{-2x} (A \cos(3x) + B \sin(3x)) + x - 1 + e^{-2x}$ où $A, B \in \mathbb{R}$

La solution cherche: $y(0) = A - 1 + 1 = 0 \Rightarrow A = 0$

$y'(0) = -2e^{-2x} (A \cos(3x) + B \sin(3x)) + e^{-2x} (-2A \sin(3x) + 3B \cos(3x)) + 1 - 2e^{-2x}$

$y'(0) = -2(0 + 0) + 1(0 + 3B) + 1 - 2$

$= 0 + 3B + 1 - 2 = 3B - 1 = 2 \Rightarrow 3B = 3 \Rightarrow B = 1$

$y(x) = \sin(3x)e^{-2x} + x - 1 + e^{-2x}$

Exo 5 $\underbrace{L(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)}_{P(x)} = f(x)$. On veut $\mathcal{L}(x) > 0$

$\mathcal{L}(1) = 0$. On peut diviser par $x - 1$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x - 1 \\ \hline -(x^3 - x^2) & x^2 - 5x + 6 \\ \hline -5x^2 + 11x - 6 & \\ -(-5x^2 + 5x) & \\ \hline 6x - 6 & \\ -(6x - 6) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\Delta = 25 - 24 = 1$

racines: $\frac{5 \pm 1}{2} = \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$

les 3 racines de P sont 1, 2 et 3.

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$x - 1$	-	0	+	+	+
$x^2 - 5x + 6$	+	+	0	-	+
$P(x)$	-	+	-	+	

Donc $\mathcal{D}_f =]1, 2[\cup]3, +\infty[$

Exo 6 $\sin(3x) = \cos(x + \frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow \cos(x + \frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{2} - 3x)$

1^{er} cas: $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi$

$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}$ où $k \in \mathbb{Z}$

2^{er} cas: $x + \frac{\pi}{3} = -(\frac{\pi}{2} - 3x) + 2k\pi$

$-2x = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \text{ où } k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{12} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \right\}$

Exo 7 $y' + 3y = \cos(2x)$.

Hom: $y' + 3y = 0$

$y_H = A e^{-3x}$ ou $A \in \mathbb{R}$

Sol part: $y_p = a \cos(2x) + b \sin(2x)$

$y_p' = -2a \sin(2x) + 2b \cos(2x)$

$y_p' + 3y_p = -2a \sin(2x) + 2b \cos(2x) + 3a \cos(2x) + 3b \sin(2x)$
 $= (2b + 3a) \cos(2x) + (3b - 2a) \sin(2x) = \cos(2x)$

$\Rightarrow \begin{cases} 2b + 3a = 1 \\ 3b - 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \times 2 & \begin{cases} 4b + 6a = 2 \\ 19b - 6a = 0 \end{cases} \\ \times 3 & \end{cases}$

$\hookrightarrow \begin{cases} \times 2 \\ \times 3 \end{cases} \Rightarrow 13b = 2 \Rightarrow \boxed{b = \frac{2}{13}} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 3b = \frac{3 \cdot 2}{13} \\ \Rightarrow a = \frac{3}{13} \end{cases}$

$y_p = \frac{3}{13} \cos(2x) + \frac{2}{13} \sin(2x)$

Exo 8 f s'annule en 0, donc $f(0) = 0$

$f \circ f(0) = f[f(0)] = f[0] = 0$

donc $f \circ f$ s'annule aussi en 0

Exo 8 $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ • les $y \geq 0$ ont un seul antécédent: \sqrt{y}
 $f: x \mapsto x^2$ • les $y < 0$ n'ont pas d'antécédents.

Donc f est injective et n'est pas surjective