

Exo 4 $\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} (e^{i4x} + 4e^{i3x-i2x} + 6e^{i2x-i2x} + 4e^{i2x-i3x} + e^{-i4x})$
 $= \frac{1}{16} (e^{i4x} + 4e^{i2x} + 6e^{i0} + 4e^{-i2x} + e^{-i4x})$

Or $e^{i4x} + e^{-i4x} = 2\cos(4x)$ et $e^{i2x} + e^{-i2x} = 2\cos(2x)$ et $e^{i0} = 1$

Donc $\cos^4 x = \frac{1}{16} (2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6) = \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$

Exo 6 Initialisation: Pour $n=1$: $6^1 - 1 = 5$ ok
Hérédité: Je prends un $n \geq 1$. Je suppose que $6^n - 1$ est divisible par 5

$6^n - 1 = 5k$ où $k \in \mathbb{Z}$

On multiplie par 6: $6^{n+1} - 6 = 30k$

On ajoute 5: $6^{n+1} - 6 + 5 = 30k + 5$ $6^{n+1} - 1 = 5(6k+1)$

Donc $6^{n+1} - 1$ est divisible par 5

Conclusion: D'après le principe de récurrence: $6^n - 1$ est divisible par 5, $\forall n \geq 1$

Exo 8 L'équation $\sqrt{x+20} > x$ a pour ensemble de définition $D = [-20; +\infty[$
 (ce qui est sous la $\sqrt{\quad}$ doit être ≥ 0)

On note $f(x) = \sqrt{x+20} - x$. On cherche les x tels que $f(x) = 0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+20} = x \Rightarrow x+20 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 20 = 0$
 $\Delta = 1 + 80 = 81 = 9^2$ $x = \frac{1 \pm 9}{2} = \begin{matrix} 5 \\ -4 \end{matrix}$

f s'annule seulement en 5

x	-20	5	+∞
$f(x)$	+	0	-

$f(0) = \sqrt{20} > 0$ $f(16) = \sqrt{36} - 16 = 6 - 16 = -10 < 0$
 $\sqrt{x+20} > x \Leftrightarrow f(x) > 0$ ici $S = [-20; 5[$

Exo 7 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ $f(1) = \frac{2}{0}$ et $f(-1) = ?$ $f(1) \neq f(-1)$, f est impaire ni impaire

$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ $f(-x) = \ln(1-x) - \ln(1+x) = -(\ln(1+x) - \ln(1-x)) = -f(x)$
 f est impaire

$f(x) = \sin(3x)$ $f(-x) = \sin(3(-x)) = \sin(-3x) = -\sin(3x) = -f(x)$ $\sin(3x)$ est impaire
 $g(x) = \sin(x^2)$ $g(-x) = \sin((-x)^2) = \sin(x^2) = g(x)$ $\sin(x^2)$ est paire