

Exo 1 • $I = \int \frac{x}{1+x^2} dx$ chgt $X = x^2$ $\frac{dX}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dX}{2x}$

$$I = \int \frac{x}{1+x} \frac{dX}{2x} = \frac{1}{2} \int \frac{dX}{1+X} = \frac{1}{2} \ln(1+X) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

$$\boxed{\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2)}$$

• $J = \int 1 \cdot \arctan(x) dx$ I.R.R. $\begin{cases} u = \arctan(x) & u' = \frac{1}{1+x^2} \\ v' = 1 & v = x \end{cases}$

$$J = [uv] - \int v dv = x \arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \underline{x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)}$$

• $xy' + 3y = \frac{\arctan(x)}{x^2}$

$$\text{Hom} : y_H = Ae^{-\int \frac{3}{x} dx} = Ae^{-3 \int \frac{1}{x} dx} = Ae^{-3 \ln|x|} = Ae^{\ln(x^{-3})} = Ax^{-3}$$

$$\boxed{y_H = Ax^{-3} \text{ ou } A \in \mathbb{R}}$$

Sol particulière MVC $y_p = Ax^{-3}$

$$y_p' = A(-3)x^{-4} = -3x^{-4}Ax$$

$$xy_p' + 3y_p = A(-3)x^{-2} + 3x^{-3}Ax = x^{-2} \arctan(x)$$

$$\Rightarrow A(-3)x = \arctan(x) \Rightarrow y_p = \int \arctan(x) dx$$

$$\boxed{y_p = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)}$$

Sol de l'eq complète :

$$\boxed{y = \frac{A}{x^3} + x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \text{ ou } A \in \mathbb{R}}$$

$$\text{Exo 2: } \begin{cases} (a-1)x + (a+1)y + (a-2)z = a \\ ax + ay + (a-1)z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 + (a-2)L_2 & \begin{cases} (a-1)x + (3a-3)y & = 2a-2 \\ ay - z & = 1 \end{cases} \\ L_3 + (a-1)L_2 & ax + (2a)y = a+2 \end{cases}$$

$$1^{\text{er}} \text{ cas: } \boxed{a=0} \quad L_3 \Rightarrow 0=2 \text{ impossible} \quad \boxed{\mathcal{F} = \emptyset}$$

$$2^{\text{es}} \text{ cas: } \boxed{a=1} \text{ le système devient } \begin{cases} 0 = 0 & \text{3 équations, 2 eq - détermine 1} \\ ay - z = 1 & \text{ou pose } y = t: \\ x + ty = 3 \end{cases}$$

$$x = 3 - 2t \quad z = 2t - 1 \quad \boxed{\mathcal{F} = \{(-2t+3; t; 2t-1) \mid t \in \mathbb{R}\}}$$

$$3^{\text{es}} \text{ cas: } \boxed{a \neq 1 \text{ et } a \neq 0} \text{ le système devient } \begin{cases} 2 + 3y = 2 \\ ay - z = 1 \\ x + 2y = \frac{a+2}{a} \end{cases}$$

$$L_1 \rightarrow L_3: \quad y = 2 - \frac{a+2}{a} = \frac{2a - (a+2)}{a} = \frac{a-2}{a} \Rightarrow x = -2y + \frac{a+2}{a} \\ = \frac{a+2 - 2(a-2)}{a} = \frac{-a+6}{a}$$

$$\text{et } z = 2y - 1 = \frac{2a-4}{a} - \frac{a}{a} = \frac{a-4}{a}$$

$$\text{Une sol unique: } \boxed{\mathcal{F} = \left\{ \left(\frac{-a+6}{a}, \frac{a-2}{a}, \frac{a-4}{a} \right) \right\}}$$

Exo 3 : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

• $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$ $\boxed{I_0 = \frac{\pi}{2}}$

• $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-1) = 1$ $\boxed{I_1 = 1}$

• $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \sin^2 x dx$

$\begin{array}{l} \text{IPP} \\ u = \sin x \\ v' = \sin x \end{array} \quad \begin{array}{l} u' = (\sin x)' = \cos x \\ v = -\cos x \end{array}$

$I_{n+2} = [\sin^n x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^2 x dx$

$= 1 - \sin^2 x$

$= 0 + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x (1 - \sin^2 x) dx = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^n x - \sin^{n+2} x) dx$

$I_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x dx$

$I_{n+2} = (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2} \Rightarrow I_{n+2} + (n+1) I_{n+2} = (n+1) I_n$

$\Rightarrow \boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n}$

• Initialisation : pour $p=0$ $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{(0p)!}{(0!)^2} \frac{\pi}{2^{0p}} = \frac{0!}{0!^2} \frac{\pi}{2^0} = \frac{\pi}{2}$ OK

• Hérédité : Je prends un $p \geq 0$. Je suppose que $I_p = \frac{(0p)!}{(0!)^2} \frac{\pi}{2^{0p}}$

$I_{(2p+1)} = I_{(2p+2)} = \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p}$ d'après la D précédente

$= \frac{(2p+1)(0p)!}{(2p+2)(0!)^2 2^{2p+1}} = \frac{\cancel{(2p+1)}(2p+1)(0p)!}{\cancel{(2p+1)}(2p+2)(0!)^2 2^{2p+1}} = \frac{(2p+2)!}{2^2 (0p+1)^2 (0!)^2 2^{2p+1}}$

$\begin{array}{l} \parallel \\ 2^{(2p+1) - 2p+1} \\ \parallel \\ 2^2 (0p+1)^2 \end{array}$

$= \frac{(2p+2)!}{(p+1)!^2 2^{2p+3}}$ **CFD!**

• Conclusion : D'après le principe de récurrence :

$\forall p \geq 0 \quad I_p = \frac{(0p)!}{(0!)^2} \frac{\pi}{2^{0p}}$

Ex 4

$$z_m = \frac{-\frac{1}{2} + m + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2} - m + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(41) $z_m = \frac{(-\frac{1}{2} + m + i\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{1}{2} - m - i\frac{\sqrt{3}}{2})}{(-\frac{1}{2} - m + i\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{1}{2} - m - i\frac{\sqrt{3}}{2})}$ On a multiplié par le conjugué

$$= \frac{(\frac{1}{2})^2 - (m + i\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{(\frac{1}{2} + m)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{\frac{1}{4} - m^2 - m\sqrt{3}i + \frac{3}{4}}{\frac{1}{4} + m + m^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1 - m^2 - m\sqrt{3}i}{1 + m + m^2}$$

$$\operatorname{Re}(z_m) = \frac{1 - m^2}{1 + m + m^2}$$

$$\operatorname{Im}(z_m) = \frac{-m\sqrt{3}}{1 + m + m^2}$$

(42) $\operatorname{Re}(z_m) = 0 \Leftrightarrow 1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$

$$z_1 = \frac{-\sqrt{3}}{3}i$$

$$|z_1| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\arg(z_1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$z_{-1} = \frac{\sqrt{3}}{1}i$$

$$|z_{-1}| = \sqrt{3}$$

$$\arg(z_{-1}) = \frac{\pi}{2}$$

(43) $(z+i)^3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}i = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

On pose $Z = z+i$

$$Z^3 = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

et $z = Z - i$

Il y a 3 solutions: $Z_k = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})}$ où $k = 0, 1, 2$

$$Z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$Z_1 = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})} = e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

$$Z_2 = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3})} = e^{i\frac{9\pi}{6}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -1$$

$$z_2 = -1 - i$$

Problème, Dérivée $\forall f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

① $D_f = \mathbb{R}^*$ (le seul problème est le least de fonction)

② $f(-x) = \frac{-x^2+1}{-x} = \frac{x^2+1}{x} = -\frac{x^2+1}{-x} = -f(x)$. fonction impaire.

On fera l'étude sur \mathbb{R}^{+*} et la symétrie $/0$

③ f est dérivable sur \mathbb{R}^* comme un quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions dérivables.

$$\text{et } f'(x) = \frac{2x \cdot x - 1 \cdot (x^2+1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$		2	$+\infty$

$\text{I} \quad \leftarrow \quad \text{II}$

f' est du type de x^2-1 , donc positif à l'extérieur des racines

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \left(\frac{1}{0^+} = +\infty \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

⑤ En $x_0 = 1$ $f'(1) = 0$ tangente horizontale d'équation $y = 0x + b$
 en $x_0 = 1, f(x_0) = 2$ $z = 0 \cdot 1 + b$ $T_1: y = 2$

$$\text{En } x_0 = 2 \quad f'(2) = \frac{2-1}{4} = \frac{3}{4} \quad f(2) = \frac{5}{2}$$

$$T_2: y = \frac{3}{4}x + b \quad \frac{5}{2} = \frac{3}{4} \cdot 2 + b = \frac{3}{2} + b \Rightarrow b = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$T_2: y = \frac{3}{4}x + 1$

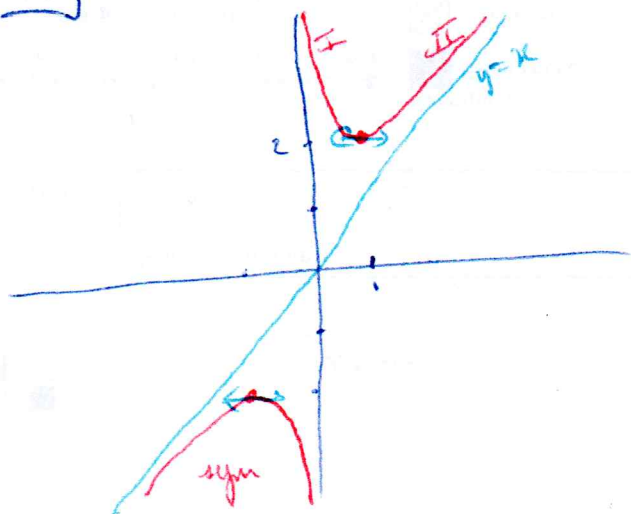
⑥ En 0^+ : $f(x) \rightarrow +\infty$ asymptote d'équation $x=0$

$$\begin{array}{r|l} x^2+1 & x \\ -x^2 & x+\frac{1}{2} \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

asymptote $y = x$

courbe au dessus en $+\infty$
 car $\frac{1}{x} \rightarrow 0^+$



Sauve α $g(x) = \frac{5x+4}{x(x-1)} = \frac{5x+4}{x^2-x}$

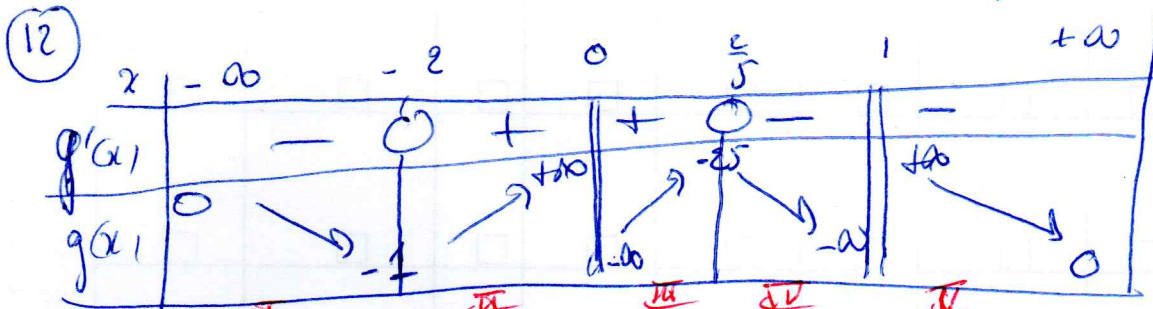
(9) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ le seul problème est le tracé de fonction

(10) $g(2) = \frac{14}{2} = 7$ et $g(-2) = \frac{-6}{-2 \cdot -3} = -1$ g est impaire ni paire ni périodique

(11) g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ comme quotient (tout le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions dérivables.

$$g'(x) = \frac{5(x^2-x) - (2x-1)(5x+4)}{(x^2-x)^2} = \frac{5x^2-5x - (10x^2+8x-5x-4)}{(x^2-x)^2} = \frac{-5x^2-8x+4}{(x^2-x)^2}$$

$\Delta = 64 + 80 = 144 = 12^2$ $x = \frac{8 \pm 12}{-10} = \frac{20}{-10} = -2$ $\frac{-4}{-10} = \frac{2}{5}$



g' est du signe de $-5x^2-8x+4$ donc négatif à l'extérieur des racines

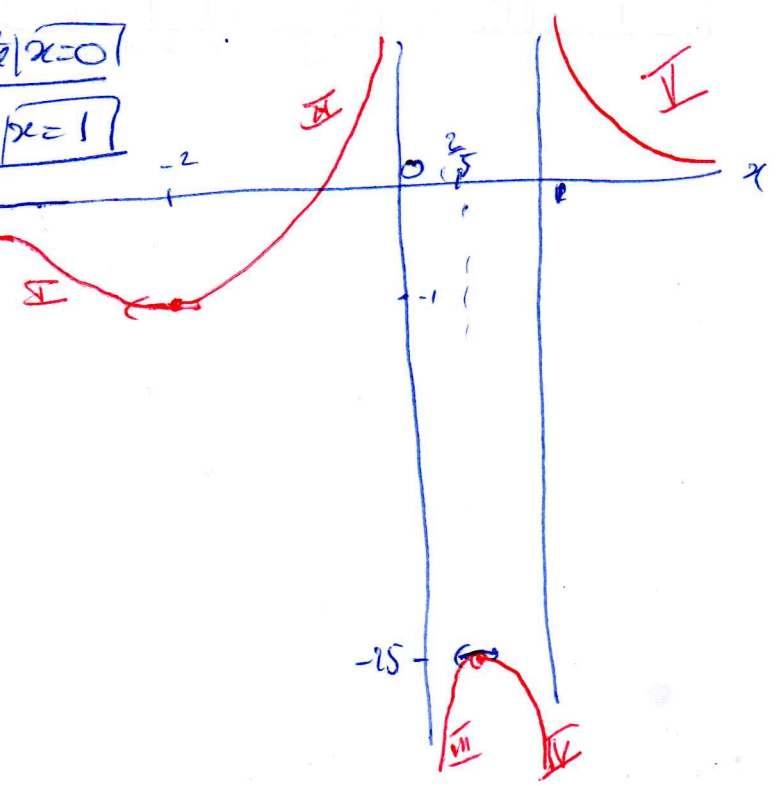
$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x} = 0$ $g(\frac{2}{5}) = \frac{2+4}{\frac{2}{5}(-\frac{3}{5})} = -25$
 $g(-2) = \frac{-6}{(-2)(-3)} = -1$ $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{4}{0} = \infty$ $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{9}{0} = \infty$

(13) En -2 : $g'(x) = 0$ $g(x) = -1$ t/c horizontale de eq $y = -1$

En 2 : $g'(2) = \frac{14}{2} = 7$ $y = -8x + b$ $7 = -8 \cdot 2 + b$ $b = 7 + 16 = 23$ $y = -8x + 23$
 $g'(2) = \frac{-20-16+4}{4} = \frac{-32}{4} = -8$

(14) qd $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow \infty$ asymptote $|x=0|$
 qd $x \rightarrow 1$, $y \rightarrow \infty$ asymptote $|x=1|$

(15) qd $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow 0$ asymptote $|y=0|$



Partie III

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2+4}{t} \\ y(t) = \frac{5t+4}{t(t-1)} \end{cases}$$

[17] $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ à cause des traits de fraction

[18] x est impaire, y n'a pas de parité.
Pas de période. On ne peut pas réduire l'intervalle d'étude

(15)

t	$-\infty$	-2	-1	0	$\frac{2}{5}$	1	$+\infty$
x'	+	+	○	-	-	-	+
x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-2	$+\infty$	2	$+\infty$	$+\infty$
y'	-	○	+	+	○	-	-
y	0	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
	I	II	III	IV	V	VI	

(20) $E_{\infty \pm \infty}$: $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow 0$ asymptote d'éq $y=0$

$E_{\infty 1}$: $x \rightarrow 2$, $y \rightarrow \infty$ asymptote d'éq $x=2$

(21) $E_{\infty 0^{\pm}}$: $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$ on cherche s'il y a une asymptote oblique.

$$\frac{y}{x} = \frac{5t+4}{t(t-1)} \cdot \frac{t}{t+4} \xrightarrow{0} \frac{4}{-1 \cdot 1} = \boxed{-4 = a}$$

$$y - ax = y + 4x = \frac{5t+4}{t(t-1)} + \frac{4t^2+4}{t} = \frac{5t+4 + (4t^2+4)(t-1)}{t(t-1)}$$

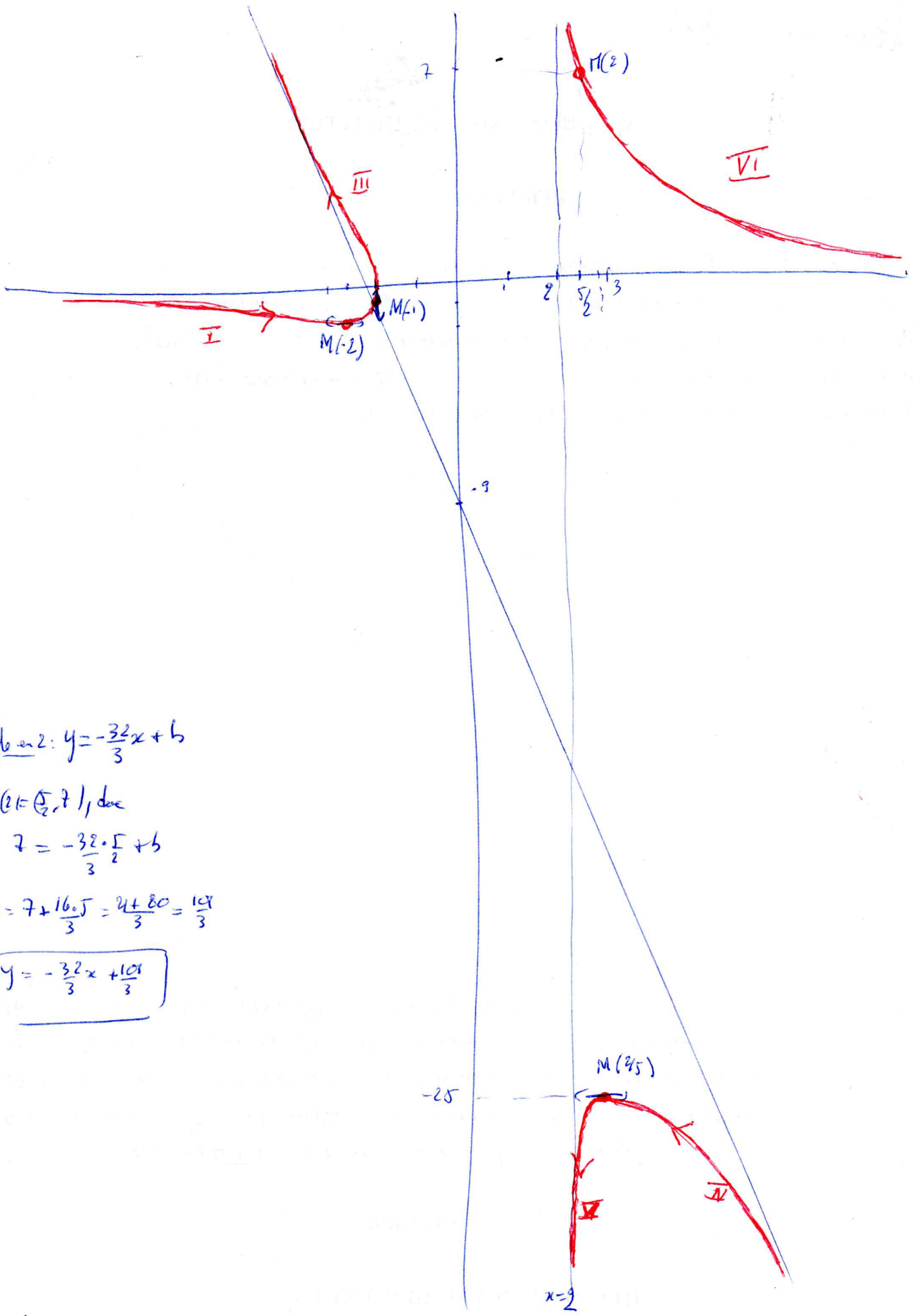
$$= \frac{5t+4 + 4t^3 + 4t - 4t^2 - 4}{t(t-1)} = \frac{4t^3 - 4t^2 + 9t}{t(t-1)} = \frac{4t^2 - 4t + 9}{t-1} \rightarrow \boxed{-9 = b}$$

asymptote $y = -4x - 9$

(22) $E_{\infty -2}$ et $\frac{2}{5}$: $y' = 0$ et $x' \neq 0$ la pente vaut $\frac{y'}{x'}$ donc 0 tpe horizontale

$E_{\infty -1}$: $x' = 0$ et $y' \neq 0$ la pente vaut $\frac{y'}{x'} = \infty$ tpe verticale

(23) $E_{\infty 2}$: $M(2) = (\frac{5}{2}, 7)$, $\vec{T}(2) = (x'(2), y'(2)) = (\frac{8}{7}, -8)$ pente = $-\frac{8}{\frac{8}{7}} = -\frac{32}{3}$



Geraden 2: $y = -\frac{32}{3}x + b$

$M(2) = (\frac{5}{2}, 7)$, da

$$7 = -\frac{32}{3} \cdot \frac{5}{2} + b$$

$$b = 7 + \frac{16 \cdot 5}{3} = \frac{21 + 80}{3} = \frac{101}{3}$$

$$y = -\frac{32}{3}x + \frac{101}{3}$$