

Problème: (1)  $f(x) = 3xe^{-x^2} - 1$   $f'(x) = 3e^{-x^2} - 6x^2e^{-x^2} = 3(1-2x^2)e^{-x^2}$

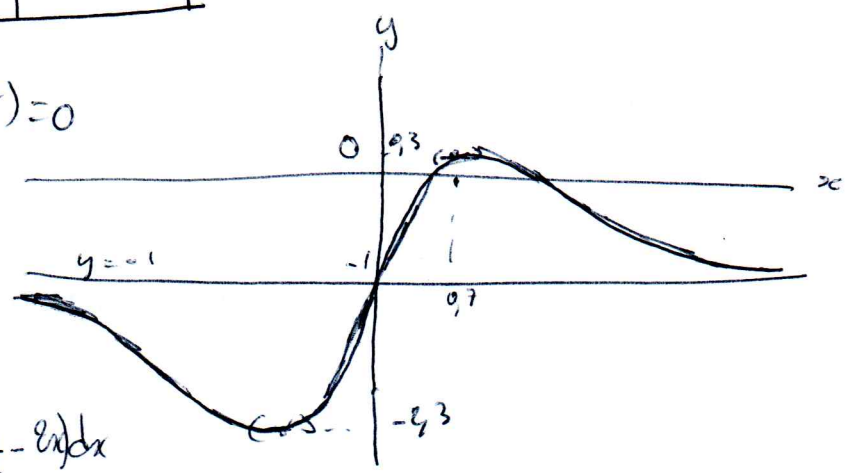
$1-2x^2=0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) \approx \frac{3}{1,41} \cdot 0,71 - 1 \approx 1,3 - 1 \approx 0,3$

$f(\frac{1}{\sqrt{2}}) \approx 1,3 - 1 \approx 0,3$

$\lim_{\pm\infty} xe^{x^2} = 0$ , donc  $\lim_{\pm\infty} f(x) = -1$

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f(x)$	-	o	+	o	-
$f(x)$	-1	$\approx -0,3$		$\approx 0,3$	-1



(21) Horiz =  $xy' - (m-2x^2) = 0$

$$y_H = Ae^{\int \frac{m-2x^2}{x} dx} = Ae^{\int (\frac{m}{x} - 2x) dx} = Ae^{m \ln x - x^2} = Ae^{\ln x^m - x^2} = Ae^{\ln x^m} e^{-x^2} = Ax^m e^{-x^2}$$

$y_H = Ax^m e^{-x^2}$  où  $A \in \mathbb{R}$

(22) Solution particulière :  $y_p = a$   $y_p' = 0$

$-(m-2x^2)a = m-2x^2 \Rightarrow a = -1$   $y_p = -1$

(23) Solutions de (E<sub>n</sub>) :  $y = Ax^m e^{-x^2} - 1$  où  $A \in \mathbb{R}$

(31)  $g_n(0) = -1 < 0$   $g_n(1) = 3e^{-1} - 1 = \frac{3}{2,72} - 1 > 1 - 1 = 0$

(32)  $g'_n(x) = (3mx^{m-1} - 6x^{m+1})e^{-x^2} = 3x^{m-1} [m - 2x^2] e^{-x^2}$

$g'_n$  s'annule qd  $x=0$  et qd  $m-2x^2=0$  c'ad  $x^2 = \frac{m}{2}$ , donc  $x = \pm \sqrt{\frac{m}{2}}$

(33)

$x$	0	1	$\sqrt{\frac{n}{2}}$	$+\infty$
$g'_n(x)$		+	0	-
$g_n(x)$			$> 0$	

-1  $\nearrow$   $\searrow$  -1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = -1 \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x^2} = 0$$

Entre 0 et 1,  $g_n$  est continue et strictement croissante. Donc elle s'annule une fois (en  $u_n$ )

Entre  $\sqrt{\frac{n}{2}}$  et  $+\infty$ ,  $g_n$  est strictement décroissante. Donc, elle s'annule une fois (en  $v_n$ )

(34)  $\sqrt{\frac{n}{2}} \leq v_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n}{2}} = +\infty$  donc  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}$  (T des gendarmes)

(35)  $g_n(u_n) = 0 \Rightarrow 3u_n^n e^{-u_n^2} - 1 = 0 \Rightarrow 3u_n^n e^{-u_n^2} = 1 \Rightarrow \boxed{e^{-u_n^2} = \frac{1}{3u_n^n}}$

$g_{n+1}(u_n) = 3u_n^{n+1} e^{-u_n^2} - 1 = 3u_n^{n+1} \frac{1}{3u_n^n} - 1 = 3u_n - 1 < 0$   $g_{n+1}(u_n) < 0$

(36)  $g'_n(x) = 3x^n [n+1 - 2x^2] e^{-x^2}$  (Q32)  $g'_n > 0$  sur  $[0; 1]$

( $g'_{n+1}(1) = 3[n+1]e^{-1} > 0$ )

$x$	0	$u_n$	1
$g'_{n+1}$		+	
$g_{n+1}$	-1	$> 0$	

tableau de variation de  $g_{n+1}$ :  $0 < u_n < u_{n+1}$

$g_{n+1}(u_n) < 0$ , donc, d'après le

La suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est croissante

(37) La suite  $(u_n)$  est croissante et majorée (pu 1), donc elle converge.

(38)  $g_n(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^n e^{-x^2} = 1 \Leftrightarrow \ln[3x^n e^{-x^2}] = \ln 1$  (car  $\ln$  est bijective)  
 $\Leftrightarrow \ln 3 + \ln(x^n) + \ln(e^{-x^2}) = 0 \Leftrightarrow \boxed{h_n(x) = 0}$

(39) Si  $l \neq 1$ , alors  $l < 1$  (car  $u_n < 1, \forall n$ ).  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(u_n) = \ln(l) < 0$

donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_n = \ln l < 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(u_n) = 3 + \infty - l^2 \neq 0$

$h_n(u_n) = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(u_n) \neq 0$ . Contradiction.

Donc  $l = 1$  La suite  $(u_n)$  converge vers 1