

⑧ $\sum_{k=3}^{n+1} 2^k = 8 + 16 + \dots + 2^{n+1} = 8 [1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-2}] = 2^3 \frac{2^{n-1} - 1}{2-1} = 2^3 (2^{n-1} - 1) = 2^{n+2} - 8$

⑨ $\text{arcc}(F_3): S(2^{n+1}) = S(4) + \sum_{k=2}^n S(2^k) + \sum_{k=3}^{n+1} 2^k$
 $= 4 + \sum_{k=2}^n (k-1)2^k + 2^{n+2} - 8$
 $= 4 + (n-2)2^{n+1} + 4 + 2^{n+2} - 8 = (n-2)2^{n+1} + 2^{n+2} = n2^{n+1}$ OUI

Comme $S(2^n) = (n-1)2^n$, on a bien $S(2^{n+1}) = n2^{n+1}$. C'est cohérent.

⑩, pour $n=2$. $N(4) = 1$ et $2^{2-1} - 1 = 2^1 - 1 = 1$

• hérédité: Je prends un $n \geq 2$. Je suppose que $N(2^n) = 2^{n-1} - 1$

$N(2^{n+1}) = 2N(2^n) + 1 = 2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 2 + 1 = 2^n - 1$ c.q.f.d

• conclusion: d'après le principe de récurrence, $N(2^n) = 2^{n-1} - 1$, pour tout n

Ainsi, une meilleure valeur de $S(2^n)$ serait: $S(2^n) = (n-1)2^n - (2^n - 1)$
 $= n2^n - 2 \cdot 2^{n-1} - 2 + 1$
 $= n2^n - 3 \cdot 2^{n-1} + 1$

Exo 1 H.o.T: $(1+t)y' + y = 0$ $y = A e^{-\int \frac{1}{1+t} dt} = A e^{-\ln|1+t|} = A e^{\ln \frac{1}{1+t}} = \frac{A}{1+t}$ où $A \in \mathbb{R}$

Solution particulière: M.V.C. $y_2 = \frac{A \ln(1+t)}{1+t}$; $y_2' = \frac{A(t \ln(1+t) - A)}{(1+t)^2}$

$(1+t)y_2' + y_2 = A' \ln(1+t) - \frac{A}{1+t} + \frac{A \ln(1+t)}{1+t} = A' \ln(1+t) = 1 + \ln(1+t)$

$A'(t) = \int (1 + \ln(1+t)) dt = t + \int \ln(1+t) dt$ $\int \ln u = u \ln u - \int \frac{1}{u} du$ $u = \ln(1+t)$ $u' = \frac{1}{1+t}$ $u = t$

$A(t) = t + [t \ln(1+t)] - \int \frac{t}{1+t} dt$ $\frac{t}{1+t} = \frac{1+t-1}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$

$A(t) = t + t \ln(1+t) - \int (1 - \frac{1}{1+t}) dt = t + t \ln(1+t) - t + \ln(1+t)$

donc $y_2 = \frac{t \ln(1+t) + \ln(1+t)}{1+t} = \ln(1+t) = y_2$

Sol. de l'éq complète: $y = \frac{A}{1+t} + \ln(1+t)$ où $A \in \mathbb{R}$

Solution telle que $y(0) = 4$: $y(0) = \frac{A}{1} + \ln(1) = A = 4 \Rightarrow A = 4$

$y = \frac{4}{1+t} + \ln(1+t)$

Exo 2 $(\sin(x^6))' = \cos(x^6) \cdot 6x^5$ et $(\sin^6 x)' = 6 \sin^5 x \cdot \cos x$

$(\frac{\sqrt{x}}{x^3})' = (x^{0,5-3})' = (x^{-2,5})' = -2,5 x^{-3,5}$