

Problème

①. Initialisation: Pour $n=2$ $S(2^2)=S(4)=4$ et $(n-1)2^n=1 \cdot 2^2=4$ ok

• Hérédité: Je prends en $n \geq 2$. Je suppose que $S(2^n)=(n-1)2^n$

$$S(2^{n+1}) = 2 \cdot S(2^n) + 2^{n+1} = 2 \cdot [(n-1)2^n] + 2^{n+1} = (n-1)2^{n+1} + 2^{n+1} = n2^{n+1} \quad \text{c'est tout bon!}$$

• Conclusion: D'après le principe de récurrence: $S(2^n) = (n-1)2^n, \forall n \geq 2$

② $1+r+r^2+\dots+r^n = \begin{cases} \frac{r^{n+1}-1}{r-1} & \text{qd } r \neq 1 \\ n+1 & \text{qd } r=1 \end{cases}$ Donc $\sum_{k=0}^n 2^k = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1}-1$

③. Pour $n=1$: $\sum_{k=0}^1 2^k = 1+2=3$ et $2^{n+1}-1=2^2-1=3$ ok

• Hérédité: Je prends en $n \geq 1$. Je suppose que $\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1}-1$.

Je dois montrer que $\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{n+2}-1$

On ajoute 2^{n+1} à l'hypothèse de récurrence: $\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{n+1}-1 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$

• On conclut.

④. $f(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$. $f'(x) = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1}-1)}{(x-1)^2} = \frac{(n+1)x^{n+1} - (n+1)x^n - x^{n+1} + 1}{(x-1)^2} = \frac{n x^{n+1} - n x^n + 1}{(x-1)^2}$

• $\left(\sum_{k=0}^n x^k\right)' = (1+x+x^2+\dots+x^n)' = x'+x^2+\dots+x^n = \sum_{k=1}^n (x^k)' = \sum_{k=1}^n k x^{k-1}$

• $\sum_{k=1}^n k 2^{k-1} = f'(2) = \frac{n 2^{n+1} - n 2^n + 1}{(2-1)^2} = n 2^{n+1} - n 2^n + 1 = 2 \cdot n 2^n - n 2^n + 1 = n 2^n - n 2^n + 1 = 1$ ok

⑤. Pour $n=1$: $\sum_{k=1}^1 k 2^{k-1} = 1 \cdot 2^0 = 1$ et $(n-1)2^n + 1 = 0 \cdot 2^1 + 1 = 1$

• Hérédité: Je prends en $n \geq 1$. Je suppose que $\sum_{k=1}^n k 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$ (1)

Je dois montrer que $\sum_{k=1}^{n+1} k 2^{k-1} = n 2^{n+1} + 1$. J'ajoute $(n+1)2^n$ à (1):

On obtient: $\sum_{k=1}^{n+1} k 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1 + (n+1)2^n = 2n 2^n + 1 = n 2^{n+1} + 1$ c'qfd.

• Conclusion: D'après le principe de récurrence: $\sum_{k=1}^n k 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1, \forall n \geq 1$

⑥ On enlève le dernier terme, c'est $n 2^{n-1}$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1 - n 2^{n-1} = 2n 2^{n-1} - 2^{n-1} + 1 - n 2^{n-1} = n 2^{n-1} - 2^{n-1} + 1$$

⑦ On multiplie par $4=2^2$: $\sum_{k=1}^{n-1} k 2^{k+1} = n 2^n - 2^{n-1} + 4 = 2^{n+1} (n-2) + 4$

⑦ On fait un changement d'indice: la formule précédente devient:

$$\sum_{k=2}^n (k-1) 2^k = (n-2) 2^{n+1} + 4$$