

Exo 1 A1

$$P(x) = \det(A - x\mathbb{I}_3) = \begin{vmatrix} 2-x & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1-x & -1 & -x \\ 1 & 2 & 2-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & 1-x & 0 \\ -1 & -1-x & -1 \\ 1 & 2 & 2-x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1-x & -1 \\ 1 & 2 & 2-x \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -x & -1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix}$$

$C_2 - C_1$

$$\text{d'apr\acute{e}s } L_1 = (1-x) [(-x)(2-x)+1] = (1-x)[x^2-2x+1] = (1-x)^3$$

② 1 est racine de multiplicit\'e 3

③ Si  $A$  \'etait diagonalisable alors par changement de base, on obtiendrait  $\mathbb{I}_3 = S^{-1}AS$

$$\text{ou encore } A = S\mathbb{I}_3 S^{-1} \text{ ou } S\mathbb{I}_3 S^{-1} = S S^{-1} = \mathbb{I}_3$$

Donc  $A = \mathbb{I}_3$ . On aboutit \`a une contradiction.

Donc  $A$  n'est pas diagonalisable.

Remarque: On aurait pu aussi calculer l'espace propre pour le valeur propre 1. Il n'est pas de dimension 3.

$$④ \text{Mat}_{\mathbb{R}}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \mathcal{B} & \mathcal{B} & \mathcal{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = A$$

$$⑤ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} C_2 - C_1 \\ C_3 - C_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{le noyau est r\'eduit \`a } \{ \vec{0} \} \\ \text{et } \underline{\text{rang}(A) = 3} \\ \text{est sujective} \end{matrix}$$

⑥  $f$  est un endomorphisme. Dans ce cas  $\text{sujectif} \Leftrightarrow \text{injectif} \Leftrightarrow \text{bijection}$ .

$f$  est bijectif

7) Dans cette question, on cherche l'espace propre pour le valeur propre 1.

$$f(\vec{u}) = \vec{u} \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = x \\ -x - y - z = y \\ x + 2y + z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 0 \\ -x - 2y - z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x + 2y + z = 0$ . C'est un plan.

les vecteurs propres  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  conciennent

Donc  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est une base de  $F$

$$8a) \det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{det}/\text{col3}}{=} 1 \neq 0$$

donc  $B'$  est une base de  $\mathbb{R}^3$

$$8b) \text{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & f(\vec{e}) \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e} \end{pmatrix}$$

$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$  et  $f(\vec{e}_2) = \vec{e}_2$  car  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  sont dans  $F$

$$f(\vec{e}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc  $\boxed{\text{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Remarque: On pouvait alors calculer  $A' = \tilde{S}'^{-1} A \tilde{S}$  où  $\tilde{S}$  est la matrice de passage de  $B$  à  $B'$ , c'est à dire

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{B_1} A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

OK

$$2A - I = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} (2I - A) \cdot A = 2IA - A^2 = 2A - (2A - I) = I$$

$$(2I - A) \cdot A = I, \text{ donc } A \text{ est inversible et } \boxed{A^{-1} = 2I - A}$$

$$\textcircled{3} \alpha I + \beta A = \alpha' I + \beta' A \Rightarrow (\alpha - \alpha')I + (\beta - \beta')A = 0$$

$$(\alpha - \alpha') \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (\beta - \beta') \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, 2<sup>ème</sup> ligne :  $(\beta - \beta') \cdot (-1) = 0 \Rightarrow \beta' - \beta = 0 \Rightarrow \beta' = \beta$

$$\Rightarrow (\alpha - \alpha')I = 0 \Rightarrow \alpha - \alpha' = 0 \quad \alpha' = \alpha$$

\textcircled{4} Conclusion :

Inductif : pour  $n=0$  :  $X_0 = A = 0I + 1A \quad \alpha_0 = 0 \quad \beta_0 = 1$

Hérédité : Je prends un  $n \geq 0$ . Je suppose que  $X_n = \alpha_n I + \beta_n A$ .

$$X_{n+1} = \frac{(X_n)^2}{n+1} + 2I \cdot A = \frac{1}{n+1} \left( \alpha_n^2 I + 2\alpha_n \beta_n A + \beta_n^2 (2A - I) \right) + 2I - A$$

$$= \underbrace{\left( \frac{\alpha_n^2 - \beta_n^2}{n+1} + 2 \right)}_{\alpha_{n+1}} I + \underbrace{\left( \frac{2\alpha_n \beta_n + 2\beta_n^2}{n+1} - 1 \right)}_{\beta_{n+1}} A$$

OK

$$\alpha_{n+1} \quad \beta_{n+1}$$

Conclusion : Pour tout  $n$ ,  $X_n = \alpha_n I + \beta_n A$

$$\textcircled{5} \quad (\alpha_0, \beta_0) = (0, 1)$$

$$\alpha_1 = \frac{0^2 - 1^2}{1} + 2 = 1 \quad \text{et} \quad \beta_1 = \frac{2 \cdot 1 (0+1)}{1} - 1 = 1 \quad (\alpha_1, \beta_1) = (1, 1)$$

$$\alpha_2 = \frac{1^2 - 1^2}{2} + 2 = 2 \quad \text{et} \quad \beta_2 = \frac{2(1+1)}{2} - 1 = 1 \quad (\alpha_2, \beta_2) = (2, 1)$$

$$\alpha_3 = \frac{4-1}{3} + 2 = 3 \quad \text{et} \quad \beta_3 = \frac{2 \cdot 3}{3} - 1 = 1 \quad (\alpha_3, \beta_3) = (3, 1)$$

\textcircled{6} Il semble que  $(\alpha_n, \beta_n) = (n, 1)$ , Thm Gau. Prouvons le par récurrence

Induction: OK pour  $n = 0, 1, 2$  et  $3$

Hypothèse: On prend un  $n \geq 0$ . On suppose que  $(\alpha_n, \beta_n) = (n, 1)$

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n^2 - \beta_n^2}{n+1} + 2 = \frac{n^2 - 1}{n+1} + 2 = \frac{(n-1)(n+1)}{n+1} + 2 = n+1$$

$$\text{et} \quad \beta_{n+1} = \frac{2\beta_n(\alpha_n + \beta_n)}{n+1} - 1 = \frac{2 \cdot 1 (n+1)}{n+1} - 1 = 2-1=1 \quad \text{CQFD}$$

Conclusion:  $\boxed{\text{Thm Gau } (\alpha_n, \beta_n) = (n, 1)}$

$$\text{et donc } X_n = nI + 1A = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & n+2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} n+2 & 2 & 1 \\ 1 & n-1 & -1 \\ 1 & 2 & n+2 \end{pmatrix}}$$