

① $B = ((1, 2, 3), (0, 1, -2))$ n'est pas une base de \mathbb{R}^3 car il n'y a que 2 vecteurs

$$B = (\underbrace{(1, 1)}_{\vec{u}}, \underbrace{(0, 1, 1)}_{\vec{v}}, \underbrace{(1, 1, 0)}_{\vec{w}})$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$C_3 - C_2$
 $C_3 - C_2$

3 vecteurs liés dans \mathbb{R}^3 . C'est une base de \mathbb{R}^3 .

1c

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

\vec{u} \vec{a} $\vec{\alpha}$ $\vec{u}-\vec{a}$ $\vec{u}-\vec{\alpha}$

$\begin{matrix} \text{L}_2 - \text{L}_1 \\ \parallel \\ (\vec{u}-\vec{a}) - (\vec{u}-\vec{\alpha}) \\ \parallel \\ \vec{u}-\vec{a} + \vec{\alpha} = \vec{0} \end{matrix}$

Ils sont liés. Ils ne forment pas une base de \mathbb{R}^3

Ils engendrent un plan.

$$\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

ici, c'est les vecteurs directeurs du plan.

eq param du \mathcal{P} :
$$\begin{cases} x = t \\ y = t + t' \\ z = 2t + 3t' \end{cases}$$

ou éliminé t et t'

$$\begin{cases} \text{L}_1 - \text{L}_2: & x - y = -t' \\ 2\text{L}_1 - \text{L}_3: & 2x - z = -2t' \end{cases}$$

$$\text{L}_2 - \frac{2}{3}\text{L}_1: 2x - z - \frac{2}{3}(x - y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-x + 3y - z = 0$$

(2) $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{f}, \vec{g})$ $\mathcal{B}' = (\vec{e} + \vec{f}; \vec{f} + \vec{g}; \vec{g} + \vec{e})$
 $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ce sont les 3 vecteurs de \mathcal{B}

Ils forment une base de \mathbb{R}^3 .

(3)(a)
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{u} - \vec{w} \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 2\vec{v} + \vec{w} \end{matrix}$$

$\text{rang}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 2$

(3b)
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{v} \\ \vec{v} \\ \vec{v} \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 3 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{v} + \vec{v} \\ 2\vec{v} + \vec{v} \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 3 & 0 & -6 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \vec{v}_2 - \vec{v}_3 \end{matrix} \text{rang } 3$$

$$\textcircled{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} & \vec{x} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ \vec{u} & 2\vec{u}-\vec{v} & \vec{u}-\vec{w} & 2\vec{u}-\vec{x} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \\ \vec{u} & \vec{v} & 3\vec{u}-\vec{v} & 4\vec{u}-\vec{v} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \\ \vec{u} & \vec{v} & 3\vec{u}-\vec{v} & 4\vec{u}-\vec{v} \end{pmatrix} \xrightarrow{C_4 - C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \\ \vec{u} & \vec{v} & 3\vec{u}-\vec{v} & \vec{u}-\vec{v} \end{pmatrix}$$

$3(2\vec{u}-\vec{v}) - (\vec{u}-\vec{w}) = 5\vec{u}-3\vec{v}+\vec{w}$ $4(2\vec{u}-\vec{v}) - (2\vec{u}-\vec{x}) = 6\vec{u}-4\vec{v}+\vec{x}$

$$C_4 - C_3: (6\vec{u} - 4\vec{v} + \vec{x}) - (5\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} - \vec{v} - \vec{w} + \vec{x} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{x} = -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(6a) \quad E = \{ (x; 2x+y; 0) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \}$$

Stabilité pour + : Je prends 2 vecteurs de E

$$\vec{u} = (x; 2x+y; 0) \quad \text{et} \quad \vec{v} = (x'; 2x'+y'; 0)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (x+x'; 2x+y+2x'+y'; 0+0)$$

$$= (X; 2X+Y; 0) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} X = x+x' \\ Y = y+y' \end{cases}$$

$\vec{u} + \vec{v} \in E$ est Stable pour +

Stabilité pour . : On prend $\vec{u} = (x; 2x+y; 0) \in E$ et $a \in \mathbb{R}$

$$a \cdot \vec{u} = (ax; 2ax+ay; 0) = (X; 2X+Y; 0) \quad \text{avec} \quad X = ax \quad \text{et} \quad Y = ay$$

donc $a\vec{u} \in E$. E est stable pour .

(1) a) Il n'y a que 2 vecteurs de \mathbb{R}^3 . Ce n'est pas une base

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\vec{u} \quad \vec{v} \quad \vec{w} \qquad \vec{u} \quad \vec{v} \quad \vec{u}-\vec{w} \qquad \vec{u} \quad \vec{v} \quad C_2+C_3$

pas de colonnes de 0, donc la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est libre

c'est une base de \mathbb{R}^3

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\vec{u} \quad \vec{v} \quad \vec{w} \qquad \vec{u}-\vec{v} \quad \vec{u}-\vec{w} \qquad C_2-C_3 = \vec{u}-\vec{v}+\vec{w}$

$$2\vec{u}-\vec{v} = \vec{u}-\vec{w} \Leftrightarrow \vec{u}-\vec{v}+\vec{w} = \vec{0}$$

la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est liée. Ce n'est pas une base de \mathbb{R}^3

$\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un plan. $\vec{\rho}$

$$\vec{\rho} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t + t' \\ z = 2t + 3t' \end{cases}$$

on élimine t et t'

$$\begin{array}{l} L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array} \quad \begin{cases} y - x = t' \\ z - 2x = 3t' \end{cases}$$

$$3(y - x) = z - 2x$$

$$-x + 3y - z = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array}$$

$$x - 3y + z = 0$$

ok

(2) $\mathcal{B} = (\vec{e}, \vec{f}, \vec{g})$ est une base de \mathbb{R}^3

$$\vec{e} + \vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \vec{f} + \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad \vec{g} + \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

ce sont les 3 vecteurs du 1b. C'est une base de \mathbb{R}^3 .

(3a)

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 3 & 11 & 11 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{u} \\ 2\vec{v} + 3\vec{u} \\ 2\vec{u} + \vec{w} \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 3-2 \end{matrix}$$

$$\text{rang}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \dim(\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})) = 2$$

3b

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{u} \quad \vec{v} \quad \vec{w}$ $\vec{u} \quad 2\vec{u}-\vec{v} \quad 3\vec{u}-\vec{w}$ $\zeta_2-\zeta_3$

rang 3

4

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$\vec{u} \quad \vec{v} \quad \vec{w} \quad \vec{x}$ $2\vec{u}-\vec{v} \quad \vec{u}-\vec{w} \quad 2\vec{u}-\vec{x}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 8 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$3\zeta_2-\zeta_3 \quad 4\zeta_2-\zeta_4$ $\zeta_3-\zeta_4$

$3(2\vec{u}-\vec{v})-(\vec{u}-\vec{w}) \quad 4(2\vec{u}-\vec{v})-(2\vec{u}-\vec{x})$
 $5\vec{u}-3\vec{v}+\vec{w} \quad 6\vec{u}-4\vec{v}+\vec{x}$

$(5\vec{u}-3\vec{v}+\vec{w})-(6\vec{u}-4\vec{v}+\vec{x})=\vec{0}$

$-\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}-\vec{x}=\vec{0}$

$\Rightarrow \vec{x} = -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B$

⑥a $E = \{ (x, 2x+y, 0) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \}$

stabilité pour +

Je prends 2 vecteurs de E $\vec{u} = (x, 2x+y, 0)$ et $\vec{v} = (x', 2x'+y', 0)$

$$\vec{u} + \vec{v} = (x+x', 2x+y+2x'+y', 0+0) = (X, 2X+Y, 0)$$

$$\text{avec } X = x+x' \text{ et } Y = y+y'$$

$\vec{u} + \vec{v} \in E$, donc E est stable pour +

Stabilité pour . On prends un vecteur $\vec{u} \in E$ ($\vec{u} = (x, 2x+y, 0)$) et $a \in \mathbb{R}$

$$a\vec{u} = (ax, 2ax+ay, 0) = (X, 2X+Y, 0) \text{ avec } X = ax \text{ et } Y = ay$$

donc $a\vec{u} \in E$.

Est stable pour .

$$(6b) F = \{(y; 0; x+y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

Stabilité pour + : Je prends 2 vecteurs $\vec{u}(y, 0, x+y)$ et $\vec{v}(y', 0, x'+y') \in F$

$$\vec{u} + \vec{v} = (y+y', 0, x+y+x'+y') = (Y, 0, X+Y) \text{ avec } Y = y+y' \text{ et } X = x+x'$$

donc $\vec{u} + \vec{v} \in F$. F est stable pour +

Stabilité pour . : on prend $\vec{u}(y, 0, x+y) \in F$ et $a \in \mathbb{R}$

$$a\vec{u} = (ay, 0, ax+ay) = (Y, 0, X+Y) \text{ avec } X = ax \text{ et } Y = ay$$

donc $a\vec{u} \in F$. F est stable pour .

$$(6c) \quad \vec{u} = (1, 2, 0) \in E \quad \vec{v} = (2, 3, 0) \in E$$

$\vec{u} + \vec{v} = (3, 5, 0) \notin E$ car $3+1=4 \neq 5$. E n'est pas stable pour +

$2.\vec{u} = (2, 4, 0) \notin E$. donc E n'est pas stable pour .

$$\textcircled{Fa} \quad E = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 3y = z \}$$

On prends 2 vecteurs $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(a, b, c) \in E$

$$\vec{u} + \vec{v} = (x+a, y+b, z+c)$$

$$\begin{aligned} 2(x+a) + 3(y+b) &= 2x + 2a + 3y + 3b \\ &= (2x + 3y) + (2a + 3b) \end{aligned}$$

$$= \begin{array}{c} z \\ \uparrow \\ \text{car } \vec{u} \in E \end{array} + \begin{array}{c} c \\ \uparrow \\ \text{car } \vec{v} \in E \end{array} \quad \downarrow \text{car } \underline{\vec{u} + \vec{v} \in E}$$

donc E est stable pour $+$