

① Initialisation: Pour $n=1$: $1^2 = 1$
 et $\frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$, ok

Hérédité: Je prends un $n \geq 1$. Je suppose que

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \leftarrow \text{on a ajouté } (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)[2n^2 + 7n + 6]}{6}$$

$$\text{or } (n+2)(2n+3) = 2n^2 + 3n + 4n + 6 = 2n^2 + 7n + 6$$

$$\text{Donc } 1^2 + 2^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \quad \text{CQFD}$$

Conclusion: D'après le principe de récurrence, $\forall n \geq 1$ $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ Initialisation : $1 \cdot 1! = 1$ et $2! - 1 = 2 - 1 = 1$ Ok

Hérédité : Je prends un $n \geq 1$. Je suppose que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

(Je dois montrer que : $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + (n+1)(n+1)! = (n+2)! - 1$)

on ajoute $(n+1)(n+1)!$:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! + (n+1)(n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)!$$

$$= (n+1)! [1 + (n+1)] - 1$$

$$= \underbrace{(n+1)! (n+2)}_{(n+2)!} - 1$$

$$= (n+2)! - 1 \quad \text{CQFD}$$

Conclusion : \forall après le principe de récurrence :

$$\forall n \geq 1 \quad 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

⑤ Initialisation : pour $n=1$ $10^1 - 1 = 9 = 9 \cdot 1$ Yes

Hérédité : Je prends un $n \geq 1$ Je suppose que $10^n - 1 = 9k$
où $k \in \mathbb{N}$

(Je dois montrer que $10^{n+1} - 1 = 9 \cdot k'$)

On multiplie l'hypothèse de récurrence par 10 :

$$10^{n+1} - 10 = 90k$$

On ajoute 9

$$10^{n+1} - 1 = 90k + 9 = 9(10k + 1) \quad \text{or } 10k + 1 \in \mathbb{N}$$

CQFD

Conclusion : $\forall n \geq 1$, $10^n - 1$ est divisible par 9

$$\textcircled{8} \quad u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0 \quad u_{n+1} = 10u_n - 9n - 8$$

$$\text{pour } n=0 : u_1 = 10u_0 - 9 \cdot 0 - 8 = 10 - 0 - 8 = 2$$

$$n=1 : u_2 = 10 \cdot u_1 - 9 \cdot 1 - 8 = 3$$

$$n=2 : u_3 = 10 \cdot u_2 - 9 \cdot 2 - 8 = 4$$

Il semble que $u_n = n+1$. Montrons ce résultat par récurrence :
Initialisation. Vrai pour 0, 1, 2 et 3

Hérédité Je prends un $n \geq 1$. Je suppose que $u_n = n+1$
(je dois montrer que $u_{n+1} = n+2$)

$$u_{n+1} = 10u_n - 9n - 8 = 10(n+1) - 9n - 8 = n+2 \quad \text{CQFD}$$

Conclusion: D'après le principe de récurrence $\forall n \geq 0 \quad u_n = n+1$

⑥ Inductivisation. $1 \times 2 = 2$
 $\frac{1 \times 2 \times 3}{3} = 2$) ok

Reserthe: Je prends un $n \geq 1$. Je suppose par $1.2 + \dots + p(p+1) = \frac{p(p+1)(p+2)}{3}$

(Je dois montrer $1.2 + \dots + (p+1)(p+2) = \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{3}$)

On ajoute $(p+1)(p+2)$

$$1.2 + \dots + p(p+1) + (p+1)(p+2) = \frac{p(p+1)(p+2)}{3} + (p+1)(p+2)$$

$$= \frac{p(p+1)(p+2) + 3(p+1)(p+2)}{3}$$

$$= \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{3} \quad \text{CQFD}$$

conclusion: ...

