

⑦ On sait que  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$

• Montrons que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée par 2, c'est-à-dire que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2$

Initialisation:  $u_0 = 1 \leq 2$  ok

Hérédité: Je prends un  $n \in \mathbb{N}$ . Je suppose que  $u_n \leq 2$  (1)

(On doit montrer que  $u_{n+1} \leq 2$ )

On ajoute 1:  $u_n + 1 \leq 2 + 1 = 3$   $u_n + 1 \leq 3$

On prend la racine:  $\sqrt{u_n + 1} \leq \sqrt{3}$  car la fonction  $\sqrt{\cdot}$  est croissante

$\Rightarrow \sqrt{u_n + 1} \leq \sqrt{3} \approx 1,7 \leq 2 \Rightarrow u_{n+1} \leq 2$  ok

Conclusion: D'après le principe de récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2$

• Montrons que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante, c'est-à-dire que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$

Initialisation: pour  $n = 0$   $u_0 = 1$  et  $u_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \approx 1,4$   $u_0 \leq u_1$  ok

Hérédité Je prends un  $n \geq 0$ . Je suppose que  $u_n \leq u_{n+1}$

(On doit montrer que  $u_{n+1} \leq u_{n+2}$ )

On ajoute 1:  $u_n + 1 \leq u_{n+1} + 1$

On prend la racine:  $\sqrt{u_n + 1} \leq \sqrt{u_{n+1} + 1}$  car la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est croissante

$\Rightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2}$  ok !

Conclusion:  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$

d'après le principe de récurrence