

$$⑥ \forall p \geq 1 \quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + p(p+1) = \frac{p(p+1)(p+2)}{3}$$

Initialisation : $1 \cdot 2 = 2$ et $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2$ ok pour $p=1$

Hérédité : Je prends un $p \geq 1$. Je suppose que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + p(p+1) = \frac{p(p+1)(p+2)}{3}$

(On doit montrer que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (p+1)(p+2) = \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{3}$)

On ajoute $(p+1)(p+2)$ à l'hypothèse de récurrence :

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + p(p+1) + \underbrace{(p+1)(p+2)}_{\text{à ajouter}} = \frac{p(p+1)(p+2)}{3} + \underbrace{(p+1)(p+2)}_{\text{à ajouter}}$$

$$= \frac{p(p+1)(p+2)}{3} + \frac{3(p+1)(p+2)}{3}$$

$$= \frac{p(p+1)(p+2) + 3(p+1)(p+2)}{3}$$

$$= \frac{(p+1)(p+2)[p+3]}{3} \quad \text{ok}$$

Conclusion : D'après le principe de récurrence,

$$\forall p \geq 1 \quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + p(p+1) = \frac{p(p+1)(p+2)}{3}$$