

⑤ $\forall n \geq 1, 10^n - 1$ est divisible par 9

Induction: pour $n=1, 10^1 - 1 = 9 = 9 \times 1$ ok

Hérédité: Je prends un $n \geq 1$. Je suppose que $10^n - 1$ est divisible par 9
càd qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $10^n - 1 = 9 \cdot k$ ①

(On doit montrer que $10^{n+1} - 1$ est divisible par 9)

On multiplie l'égalité ① par 10 :

$$10 \cdot (10^n - 1) = 10 \cdot 9 \cdot k$$

$$\Rightarrow 10^{n+1} - 10 = 90k$$

On ajoute 9 :

$$10^{n+1} - 10 + 9 = 90k + 9 \quad . \quad \text{Donc } 10^{n+1} - 1 = 9(10k + 1)$$

Donc $10^{n+1} - 1$ est divisible par 9. ok

Conclusion: $\forall n \geq 1, 10^n - 1$ est divisible par 9

D'après le principe de récurrence